



Titre: Validation d'un modèle unidimensionnel pour l'étude d'un
Title: écoulement instationnaire dans une turbine

Auteur: Marie-Claude Vallières
Author:

Date: 2016

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Vallières, M.-C. (2016). Validation d'un modèle unidimensionnel pour l'étude d'un
Citation: écoulement instationnaire dans une turbine [Mémoire de maîtrise, École
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2392/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2392/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Huu Duc Vo, & Jean-Yves Trépanier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

VALIDATION D'UN MODÈLE UNIDIMENSIONNEL POUR L'ÉTUDE D'UN
ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE DANS UNE TURBINE

MARIE-CLAUDE VALLIÈRES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

VALIDATION D'UN MODÈLE UNIDIMENSIONNEL POUR L'ÉTUDE D'UN
ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE DANS UNE TURBINE

présenté par : VALLIÈRES Marie-Claude

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MUREITHI Njuki William, Ph. D., président

M. VO Huu Duc, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., membre

DÉDICACE

Ce mémoire est dédié à Alexandre.

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, Huu Duc Vo et mon codirecteur de recherche, Jean-Yves Trépanier pour leur confiance et la liberté qu'ils m'ont accordée tout au long de ce projet.

RÉSUMÉ

Afin d'optimiser les performances et le rendement d'une turbine soumise à un écoulement instationnaire, il est essentiel de comprendre et de pouvoir prédire la propagation des ondes de perturbation et leurs effets sur la turbine. Pour ce faire, un modèle basé sur la dynamique des gaz est utilisé afin de simuler l'écoulement instationnaire et compressible intrinsèque au groupe moteur à l'étude.

Les équations de conservation pour un écoulement unidimensionnel et non-visqueux sont résolues à l'aide d'une méthode numérique d'ordre 2 basée sur les techniques par différences finies. Ce modèle permet de résoudre la propagation d'ondes dans une conduite avec des variations d'aire de section, de la friction et du transfert de chaleur à la paroi. Des conditions aux frontières sont intégrées au modèle afin de simuler les interactions aux extrémités du domaine. Les résultats du modèle sont comparés aux données expérimentales obtenues avec une conduite munie de deux plaques à orifice. Cette validation montre une représentation satisfaisante de la propagation de l'onde de pression dans la conduite pour différentes fréquences d'écoulement et différentes grosseurs d'orifice.

Parmi les conditions aux frontières, une frontière est développée afin de calculer les propriétés de l'écoulement à travers une turbine et de prédire ces performances. La turbine est traitée à l'aide d'un modèle quasi-stationnaire. Une validation avec des données expérimentales montre des erreurs significatives dans l'estimation du débit massique et de la puissance prédites par le modèle. Ces erreurs sont induites principalement par les erreurs de modélisation dues aux simplifications des phénomènes réels et le manque d'instrumentation à haute fréquence afin de simuler fidèlement les conditions à l'entrée de la turbine.

ABSTRACT

In order to maximize the turbine performance and efficiency in an unsteady flow, it is essential to be able to understand and predict the unsteady wave propagation and its effect on the turbine. To this end, a model based on gas dynamics is used to simulate the unsteady and compressible flow inherent to the engine under review.

The conservation laws for a one-dimensional, inviscid flow are solved using a modern second-order, shock-capturing, finite difference scheme. The pressure wave propagation is simulated in a duct with area variation, wall friction, as well as heat transfer effects. Boundary conditions are incorporated into the code to mimic the interactions at the pipe ends. Numerical results are compared against experimental data measured inside a manifold equipped with two nozzles. This validation shows satisfactory prediction of the pressure wave propagation for various pulse frequencies and nozzle ratios.

Among the boundary conditions, one boundary is developed to calculate the flow properties through a turbine and to predict its performance. The turbine is treated with a quasi-stationary model. Validation against experimental data shows significant errors in the mass flow and power estimated by this model. These inaccuracies are caused primarily by the simplifications used in the model to simulate complex phenomena and the lack of high frequency instrumentation in order to accurately estimate the turbine inlet conditions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
LISTE DES ANNEXES	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Dispositifs introduisant des écoulements instationnaires	1
1.1.1 Moteur à combustion interne	1
1.1.2 Pulsoréacteur	2
1.2 Éléments de la problématique	3
1.3 Objectifs de recherche	4
1.4 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	6
2.1 Modélisation unidimensionnelle du collecteur d'échappement	6
2.2 Modélisation quasi-stationnaire de la turbine	8
2.3 Techniques de mesures expérimentales	10
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE	14
3.1 Montages expérimentaux	14
3.1.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite	15
3.1.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire	18
3.2 Développement du modèle	21

3.2.1	Équations régissant l'écoulement	22
3.2.2	Développement des conditions aux frontières	33
3.2.3	Implémentation du modèle	51
CHAPITRE 4	VÉRIFICATION	53
4.1	Vérification de la méthode numérique	53
4.1.1	Cas théorique d'un tube à choc	53
4.1.2	Cas théorique d'une conduite convergente-divergente	57
4.2	Vérification des conditions aux frontières	60
4.2.1	Cas théorique du tube à choc	62
4.2.2	Données publiées	63
CHAPITRE 5	CALAGE ET VALIDATION DU MODÈLE SUR BANC D'ESSAI	69
5.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite	69
5.1.1	Procédure de test	69
5.1.2	Modélisation du montage expérimental	69
5.1.3	Calage du modèle	71
5.1.4	Résultats et discussion	79
5.2	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire	83
5.2.1	Procédure de test	84
5.2.2	Modélisation du montage expérimental	84
5.2.3	Calage du modèle	85
5.2.4	Résultats et discussion	89
CHAPITRE 6	CONCLUSION	92
6.1	Synthèse des travaux	92
6.2	Améliorations futures	93
6.2.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite	93
6.2.2	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire	94
RÉFÉRENCES	96
ANNEXES	98

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Valeurs mesurées .	18
Tableau 3.2	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Valeurs mesurées	21
Tableau 3.3	Instruments de mesure utilisés pour les montages expérimentaux . . .	22
Tableau 4.1	Vérification du modèle - Paramètres du modèle	53
Tableau 4.2	Comparaison du schéma LW2 avec la solution exacte pour un tube à choc – Paramètres du domaine	55
Tableau 4.3	Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour une conduite convergente-divergente – Paramètres du domaine	60
Tableau 4.4	Comparaison de la solution numérique avec la solution exacte pour une extrémité fermée – Paramètres du domaine	62
Tableau 4.5	Comparaison des conditions aux frontières avec des données publiées – Paramètres du domaine	65
Tableau 5.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Conditions testées	70
Tableau 5.2	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Paramètres du modèle	71
Tableau 5.3	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Constantes d'ajustement du modèle	77
Tableau 5.4	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Temps de calcul .	83
Tableau 5.5	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Conditions testées	84
Tableau 5.6	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Constantes d'ajustement du modèle	88

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Représentation générale de l'installation de la turbine	2
Figure 2.1	Représentation du banc d'essai pour évaluer la propagation de l'onde de pression dans un collecteur d'échappement (Winterbone and Pearson, 1999, fig. 5.5)	8
Figure 2.2	Pression mesurée et calculée dans la conduite en aval des jonctions - (a) jonction à pression constante, (b) jonction avec des pertes de pression (Winterbone and Pearson, 1999, fig. 5.7)	9
Figure 2.3	Représentation du banc d'essai pour évaluer la performance de la turbine d'un turbocompresseur (Costall, 2007, fig. 4.14)	10
Figure 2.4	Variation du débit massique corrigé ($\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$) en fonction du rapport de pression (p_{01}/p_2) - (a) 20 Hz et 40 Hz, (b) 60 Hz et 80 Hz (Costall et al., 2006, fig. 3)	11
Figure 3.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Représentation du montage expérimental	16
Figure 3.2	Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Représentation du montage expérimental	19
Figure 3.3	Représentation générale du modèle numérique	23
Figure 3.4	Volume de contrôle sur une section infinitésimale du tuyau	24
Figure 3.5	Variables de la méthode LW2 superposées à la grille de calcul (plan x - t)	31
Figure 3.6	Invariants de Riemann superposés à la grille de calcul (plan x - t)	35
Figure 3.7	Nomenclature des invariants de Riemann pour le calcul des conditions aux frontières	38
Figure 3.8	Calcul du niveau d'entropie	39
Figure 3.9	Conditions aux frontières - (a) représentation de l'écoulement réel à proximité de la frontière, (b) représentation des conditions aux frontières à l'aide du modèle quasi-stationnaire	41
Figure 3.10	Représentation isométrique de la réflexion de l'onde incidente à une frontière fermée	42
Figure 3.11	Représentation isométrique de la réflexion de l'onde incidente à une frontière ouverte	43
Figure 3.12	Modélisation d'une extrémité ouverte, débit entrant	44
Figure 3.13	Modélisation d'une extrémité partiellement ouverte, débit sortant	46

Figure 3.14	Modélisation d'une extrémité partiellement ouverte, débit entrant - (a) écoulement subsonique, (b) écoulement sonique	47
Figure 3.15	Modélisation de la turbine	49
Figure 3.16	Caractéristiques d'une turbine - (a) carte de performance, (b) carte de rendement, (c) diagramme h-s	50
Figure 4.1	Représentation des régions dans le tube à choc - (a) avant rupture du diaphragme, (b) après rupture du diaphragme	54
Figure 4.2	Simulation du tube à choc - Représentation du domaine	56
Figure 4.3	Comparaison du schéma LW2 avec la solution exacte pour un tube à choc à $t = 0.005$ s - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions	57
Figure 4.4	Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour un tube à choc - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions	58
Figure 4.5	Simulation de la conduite convergente-divergente - Représentation du domaine	59
Figure 4.6	Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour une conduite convergente-divergente - (a) $p_e = 0.94$ bar, (b) $p_e = 0.85$ bar, (c) $p_e = 0.40$ bar	61
Figure 4.7	Représentation des régions dans le tube à choc, après réflexion de l'onde de choc	62
Figure 4.8	Comparaison de la solution numérique avec la solution exacte pour une extrémité fermée à $t = 0.0095$ s - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions	64
Figure 4.9	Comparaison des résultats pour une extrémité droite fermée ($\phi = 0$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.2)	66
Figure 4.10	Comparaison des résultats pour une extrémité droite ouverte ($\phi = 1$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.4)	67
Figure 4.11	Comparaison des résultats pour une extrémité droite avec un orifice ($\phi = 0.5$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.7)	68
Figure 5.1	Écoulement instationnaire à travers une conduite - Représentation du domaine	70

Figure 5.2	Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différents ϕ_1 avec $f = 100\%f_{max}$ et $\phi_2 = 0.54$ - (a) $\phi_1 = 0.71$, (b) $\phi_1 = 0.76$, (c) $\phi_1 = 0.80$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Avant calage du modèle	73
Figure 5.3	Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différentes fréquences avec $\phi_1 = 0.80$ et $\phi_2 = 0.54$ - (a) $f = 67\%f_{max}$, (b) $f = 83\%f_{max}$, (c) $f = 100\%f_{max}$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Avant calage du modèle	74
Figure 5.4	Effet des constantes d’ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m})	75
Figure 5.5	Effet des constantes d’ajustement sur la moyenne temporelle de la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$)	76
Figure 5.6	Effet des constantes d’ajustement sur la variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) - (a) Coefficient de décharge de la plaque à orifice 1, (b) Coefficient de décharge de la plaque à orifice 2, (c) Multiplicateur de friction, (d) Multiplicateur du transfert de chaleur	78
Figure 5.7	Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différents ϕ_1 avec $f = 100\%f_{max}$ et $\phi_2 = 0.43$ - (a) $\phi_1 = 0.67$, (b) $\phi_1 = 0.72$, (c) $\phi_1 = 0.76$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Après calage du modèle	80
Figure 5.8	Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différentes fréquences avec $\phi_1 = 0.76$ et $\phi_2 = 0.43$ - (a) $f = 67\%f_{max}$, (b) $f = 83\%f_{max}$, (c) $f = 100\%f_{max}$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Après calage du modèle	81
Figure 5.9	Effet de l’augmentation de la fuite de 2% à 4% sur la variation de la pression statique en amont de la première plaque à orifice (p_{am}/p_{ref})	82
Figure 5.10	Performance d’une turbine dans un écoulement instationnaire - Représentation du domaine	85
Figure 5.11	Effet des constantes d’ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m})	87

Figure 5.12	Effet des constantes d'ajustement sur la moyenne temporelle de la puissance (P)	88
Figure 5.13	Moyenne temporelle du débit massique et de la puissance pour différentes vitesses de rotation avec $f = 100\%f_{max}$	90
Figure 5.14	Moyenne temporelle du débit massique et de la puissance pour différentes fréquences avec $N = 15,000rpm$	91
Figure B.1	Diagramme de flux - Extrémité ouverte	125
Figure B.2	Diagramme de flux - Extrémité partiellement ouverte, débit sortant .	126
Figure B.3	Diagramme de flux - Extrémité partiellement ouverte, débit entrant .	127

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Symboles romains

A	aire de section
c	vitesse du son
c_p	capacité thermique massique à pression constante
c_v	capacité thermique massique à volume constant
\mathbf{C}	vecteur des termes sources
C_1	première constante, équation de Sutherland
C_2	deuxième constante, équation de Sutherland
C_d	coefficient de décharge
D	diamètre
e	énergie interne
e	travail
e_r	erreur relative
f	facteur de friction
f	fréquence
\mathbf{F}	vecteur des flux
G	variable du terme de friction
h	enthalpie
h	coefficient de transfert de chaleur par convection
L	longueur
\dot{m}	débit massique
M	nombre de Mach
N	vitesse de rotation
p	pression
P	puissance
q	transfert de chaleur par unité de masse
r	rayon
r	terme du limiteur de flux
R	constante des gaz parfaits
Re	nombre de Reynolds
s	entropie
t	temps

T	température
u	vitesse du fluide
v	vitesse absolue d'une onde, $ u + c$
v	vitesse tangentielle en bout de pale
W	vecteur d'état
x	position dans l'espace

Symboles grecs

β	invariant de Riemann pour une onde se déplaçant vers la gauche
β	rapport des diamètres, orifice:tuyau
Δ	incrément
ϵ	rugosité de la surface
η	rendement
γ	rapport des capacités thermiques
λ	invariant de Riemann pour une onde se déplaçant vers la droite
μ	viscosité
ν	nombre de Courant, CFL
ρ	masse volumique
τ	contrainte de cisaillement
ϕ	rapport des aires, orifice:tuyau

Exposant

n	indice dans le temps
---	----------------------

Indices

0	état total ou de stagnation
1	station à l'entrée de la turbine
2	station à la sortie de la turbine
am	valeur en amont
av	valeur en aval

c	valeur corrigée d'un paramètre
cr	valeur critique
e	extérieur
exp	valeur expérimentale
g	gaz
geo	géométrique
i	indice dans l'espace
in	paramètre entrant
is	isentropique
max	maximal
M	multiplicateur
n	valeur non corrigée d'un paramètre
num	valeur numérique
out	paramètre sortant
ref	référence
t	station au col
tip	extrémité des pales de rotor
TS	total à statique
w	paroi

Acronymes

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
LW2	Lax-Wendroff en 2 étapes
TVD	Total Variation Diminishing
1D	unidimensionnel

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Développement des équations régissant l'écoulement	98
Annexe B	Développement des conditions aux frontières	105

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Le principe fondamental d'une turbine est de convertir l'énergie du fluide en une énergie mécanique par la rotation d'un arbre. Ces machines rotatives sont généralement conçues pour opérer en régime permanent. Par ailleurs, lorsqu'une turbine est alimentée par un écoulement hautement instationnaire, la prédiction de ses performances devient plus complexe puisque les propriétés de l'écoulement varient dans le temps et aussi possiblement dans l'espace.

Cette recherche a pour objectif de développer et valider un modèle permettant de simuler l'écoulement instationnaire à travers une turbine dans le cadre du développement d'un nouveau groupe moteur. Les performances du groupe moteur sont grandement influencées par le rendement de ses composantes. Cependant, le rendement d'une turbine soumise à des conditions instationnaires spécifiques est difficile à prédire. Le développement d'un modèle permet donc d'évaluer les performances de la turbine dans de telles conditions.

L'analyse de turbines soumises à des écoulements instationnaires a déjà fait l'objet de plusieurs études, principalement dans le domaine de l'automobile. À l'heure actuelle, plusieurs types de modèle, comportant différents niveaux de complexité, ont été développés afin d'évaluer les performances de turbines dans des écoulements non permanents.

1.1 Dispositifs introduisant des écoulements instationnaires

Il existe plusieurs dispositifs qui introduisent un écoulement instationnaire et pour lesquels il est possible de récupérer l'énergie provenant de cet écoulement à l'aide d'une turbine. Seules les deux principales applications, comportant des écoulements compressibles, sont présentées dans cette section. Un ensemble plus large de dispositifs existants est présenté par Azoury (1992).

1.1.1 Moteur à combustion interne

L'utilisation la plus répandue de turbines dans des conditions instationnaires est certainement les turbines de turbocompresseurs. Ces turbines sont principalement utilisées dans le domaine de l'automobile afin de récupérer l'énergie des gaz d'échappement d'un moteur à piston.

La phase d'échappement d'un moteur à piston est habituellement contrôlée par une soupape. Le cycle d'ouverture et de fermeture de cette soupape, associé avec le mouvement du piston qui fait varier le volume du cylindre, donne lieu à la formation d'un écoulement dont les propriétés varient dans le temps à la sortie du moteur. Lorsque la soupape est ouverte, les

gaz chauds sont alors évacués dans une conduite qui relie la sortie du moteur à l'entrée de la turbine.

1.1.2 Pulsoréacteur

Le pulsoréacteur correspond à un moteur à réaction cyclique. Il est équipé de valves munies de ressort qui s'ouvrent et se ferment alternativement en fonction de la pression à l'intérieur du moteur. Lorsque la valve d'admission est ouverte, l'air à basse pression est aspiré à l'intérieur du moteur et est ensuite allumé. L'augmentation de pression induite par la combustion permet d'ouvrir la valve d'échappement. Les gaz chauds sont alors évacués dans une conduite pour ensuite être transmis à la turbine.

Contrairement au moteur à piston, le volume de l'enceinte du pulsoréacteur ne varie pas dans le temps. Par conséquent, la combustion s'effectue à volume constant. Par contre, le cycle d'ouverture et de fermeture de la valve d'échappement, associé avec le cycle de combustion qui s'effectue de façon périodique, donne aussi lieu à la formation d'un écoulement instationnaire dans la conduite d'échappement.

Pour les deux dispositifs présentés, une conduite sépare la sortie de la composante moteur, produisant l'écoulement instationnaire, de l'entrée de la turbine. Une représentation générale de l'installation de la turbine est illustrée à la figure 1.1.

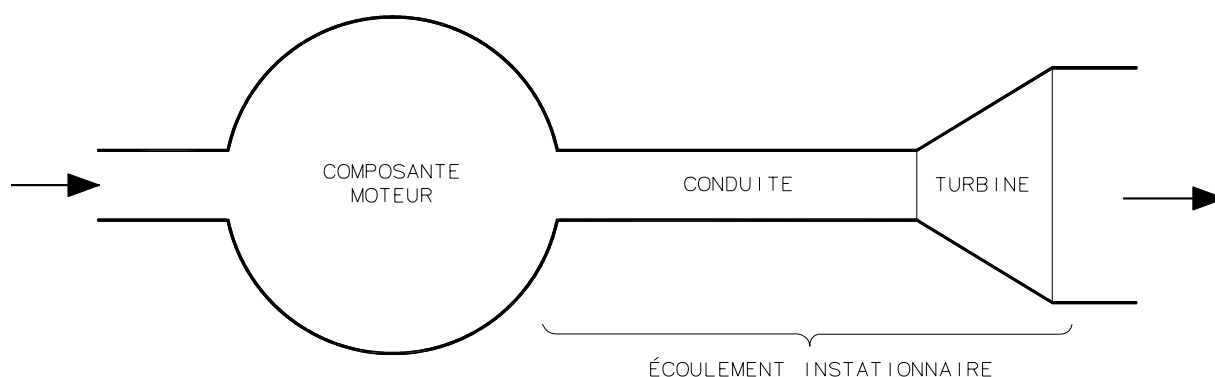


Figure 1.1 Représentation générale de l'installation de la turbine

1.2 Éléments de la problématique

Afin de modéliser la turbine, il est nécessaire de connaître les propriétés de l'écoulement à l'entrée de celle-ci. Les propriétés de cet écoulement vont dépendre du type de dispositif utilisé afin de générer l'écoulement instationnaire, de la géométrie de ce dispositif et des conditions d'opération. De plus, les propriétés de l'écoulement à l'entrée de la turbine seront affectées par la géométrie de la conduite qui relie la composante moteur à la turbine.

Lorsque les performances globales du groupe moteur sont étudiées, il est important de modéliser toutes les composantes, soit la composante moteur, la conduite et la turbine, puisque chaque composante peut avoir un impact sur les autres. Par exemple, la géométrie de la conduite et de la turbine vont influencer la réflexion des ondes de pression dans la conduite, ce qui aura une incidence sur l'évacuation des gaz d'échappement à la sortie de la composante moteur. Ainsi, si la pression dans la conduite est trop élevée et que tous les gaz brûlés ne peuvent être évacués, alors la capacité de remplissage de la composante moteur sera réduite. Ceci réduira par le fait même la performance du moteur. Similairement, la géométrie de la composante moteur et ses conditions d'opération vont avoir une incidence sur les propriétés de l'écoulement lors de la phase d'échappement. Ainsi, ces paramètres vont influencer les propriétés de l'écoulement dans la conduite et par conséquent, les performances de la turbine.

Dans le cadre de ce travail, l'accent est mis sur la modélisation de l'écoulement en aval de la composante moteur afin de mieux comprendre les phénomènes se déroulant dans la conduite d'échappement et la turbine. Il existe plusieurs niveaux de complexité dans le développement d'un modèle mathématique afin de décrire cet écoulement compressible et instationnaire. Les équations les plus complètes correspondent aux équations de Navier-Stokes en trois dimensions (Winterbone and Pearson, 2000). Par contre, la complexité de ce type de modèle dépasse les capacités actuelles permettant de simuler l'écoulement transitoire pour une multitude de configurations et de conditions d'opération. Par conséquent, il est souvent préférable d'utiliser un modèle unidimensionnel (1D) qui permet de simuler les effets importants liés à l'écoulement avec un temps de calcul raisonnable.

Dans cette même optique, un modèle quasi-stationnaire est privilégié pour modéliser la turbine. Ce type de modèle permet d'utiliser une carte de performance basée sur les caractéristiques en régime permanent afin de définir l'évolution de l'écoulement entre l'entrée et la sortie de la turbine. Par conséquent, aucune discrétisation dans l'espace n'est requise pour la modélisation de la turbine, ce qui limite grandement le temps de calcul.

Ces modèles ont été principalement développés et validés à l'aide de turbocompresseurs alimentés par des moteurs à piston. Par ailleurs, il semble exister peu de validation de ces

modèles pour d'autres applications. Les conditions d'opération dans le cadre de ce travail se distinguent principalement de celles du domaine de l'automobile par des fréquences d'oscillation plus élevées de l'écoulement des gaz d'échappement. Les fréquences d'oscillation à l'étude correspondent approximativement au double de celles généralement en jeu dans le domaine de l'automobile.

Un certain nombre de codes commerciaux sont disponibles afin d'étudier la propagation d'ondes instationnaires dans des turbines. Une liste exhaustive des logiciels disponibles est exposée par Costall (2007). Ces logiciels permettent de modéliser l'ensemble des performances du groupe moteur dans le cas de l'étude d'un moteur à combustion interne. La majorité d'entre eux sont développés pour l'industrie de l'automobile et permettent de prédire l'ensemble des performances du groupe moteur, ce qui inclue généralement un moteur à piston et un turbocompresseur. Traditionnellement, ces logiciels utilisent un modèle quasi-stationnaire pour simuler les performances de la turbine du turbocompresseur.

Malgré la disponibilité de ses logiciels, il a été choisi de développer un nouveau modèle, basé sur les modèles existants, afin de pouvoir implémenter la condition frontière spécifique à la composante moteur à l'étude et de permettre une évolution du modèle en fonction des besoins. Par exemple, un modèle unidimensionnel de la turbine pourrait être implémenté à long terme pour simuler avec plus de précision les effets instationnaires sur les performances de la turbine. De plus, ce modèle est développé afin de pouvoir facilement s'intégrer aux modèles existants des autres composantes du groupe moteur.

1.3 Objectifs de recherche

L'objectif de ce travail est de valider un modèle unidimensionnel pour la simulation de l'écoulement instationnaire dans la conduite d'échappement et de prédire les performances de la turbine pour des conditions d'opération différentes du domaine de l'automobile. Dans cette optique, l'observation de l'écoulement instationnaire et des performances d'une turbine dans un banc d'essai permettront de recueillir des données expérimentales. Par la suite, le développement d'un modèle numérique, basé sur des modèles existants, permettra de simuler l'écoulement observé dans le banc d'essai. Finalement, la comparaison entre les valeurs mesurées et les valeurs prédites permettra de valider le modèle.

1.4 Plan du mémoire

Après une revue de la littérature (chap. 2), la présentation des montages expérimentaux et le développement du modèle unidimensionnel sont présentés au chapitre 3. Afin de vérifier le

modèle, la solution numérique est comparée à la solution exacte obtenue pour différents cas théoriques au chapitre 4. Cette vérification inclue aussi une comparaison avec des données publiées. Enfin, le modèle est comparé aux résultats expérimentaux, ce qui permet d'effectuer le calage et la validation du modèle.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

La revue de littérature est divisée en trois sections. La première section traite de la validation d'un modèle unidimensionnel afin de simuler l'écoulement instationnaire dans un collecteur d'échappement. Par la suite, quelques travaux publiés en lien avec la validation d'un modèle quasi-stationnaire pour la prédiction des performances d'une turbine dans un écoulement instationnaire sont présentés. Enfin, un court sommaire des principales limitations sur les mesures expérimentales dans un écoulement instationnaire est présenté.

2.1 Modélisation unidimensionnelle du collecteur d'échappement

Un modèle unidimensionnel (1D) suppose que les propriétés varient uniquement dans le temps et dans la direction longitudinale du tuyau. Les effets de turbulence et de viscosité, qui établissent le profil de vitesse à travers la section transversale, sont négligés. Cette simplification est satisfaisante lorsque le ratio entre la longueur et le diamètre (L/D) du tuyau est suffisamment grand, ce qui est généralement le cas pour l'étude des collecteurs d'échappement. Par contre, ce type de modèle est moins approprié pour des tuyaux avec des courbures importantes (Winterbone and Pearson, 2000). Lorsque le tuyau comporte de telles courbures, des données empiriques peuvent être utilisées afin de simuler les pertes de pression associées.

Afin de limiter le temps de calcul, un modèle non-visqueux est souvent privilégié comme première approche et seuls les effets de friction à la paroi sont inclus à l'aide d'un facteur de friction. Les modèles non-visqueux peuvent être séparés en deux catégories, soit les ondes de perturbation linéaires et non-linéaires. L'hypothèse d'une onde de perturbation linéaire est utilisée lorsque l'amplitude de cette onde est relativement faible par rapport à la valeur moyenne. Il est alors possible de simplifier le problème en supposant que l'onde se propage sans se déformer. Cependant, le taux de changement des propriétés de l'écoulement dans la conduite d'échappement d'un moteur est généralement trop important pour que cette simplification soit valable, ce qui nécessite un modèle de perturbation non-linéaire.

Il est aussi possible de simplifier le problème des ondes non-linéaires en supposant que l'entropie est constante à travers le domaine. Par contre, la variation d'entropie dans la conduite d'échappement d'un moteur est importante et nécessite donc l'utilisation d'un modèle non-isentropique.

La validation d'un modèle unidimensionnel pour prédire l'écoulement dans le collecteur d'échappement a été étudiée par plusieurs auteurs. Benson et al. (1964) ont montré qu'un

modèle unidimensionnel, basé sur la méthode des caractéristiques, permettait de représenter fidèlement la variation temporelle de l'onde de pression mesurée dans une conduite. Peu d'informations sont fournies sur le montage expérimental mise à part que les essais ont été effectués à l'aide d'un générateur d'impulsions. Ce dispositif permet de générer un écoulement instationnaire dans la conduite à l'aide d'une valve alimentée à pression constante. Ce type de dispositif est aussi utilisé par de nombreux chercheurs lors de l'étude d'écoulements instationnaires à travers une turbine. L'avantage de cette approche est qu'elle permet d'obtenir plus facilement des mesures fiables par rapport à des tests effectués avec la composante moteur, où les températures en jeu sont élevées, ce qui limite l'utilisation de certains instruments de mesure. Par ailleurs, l'inconvénient principal avec ce type de dispositif est que la forme de l'onde de pression et de l'onde de température générée ne représente pas celle produite par la composante moteur.

Une validation du modèle unidimensionnel a aussi été réalisée par Winterbone and Pearson (1999) à l'aide des gaz chauds générés par une composante moteur. Le modèle utilisé dans ce cas est basé sur les techniques modernes par différences finies. Winterbone and Pearson (1999) présentent des résultats obtenus à l'aide de quatre applications : un moteur à quatre-temps à essence, un moteur automobile de course, un moteur deux temps et un moteur diesel. Les données à l'entrée de la conduite sont obtenues à l'aide d'un modèle qui simule le cycle complet du moteur à piston afin d'estimer la pression et la température durant le processus d'évacuation. Pour toutes les applications testées, les variations temporelles de pression mesurées dans le collecteur d'échappement sont comparées aux résultats numériques.

Mis à part pour le test avec le moteur deux-temps, ces essais sont effectués avec des moteurs comportant plusieurs cylindres. Chaque cylindre évacue les gaz dans une conduite distincte. Ces conduites sont par la suite jointes ensemble dans une conduite unique. La figure 2.1 illustre le montage expérimental utilisé et la configuration du collecteur des gaz d'échappement testée.

La variation temporelle de la pression statique dans la conduite qui réunit l'ensemble des sorties des quatre cylindres est comparée aux valeurs prédites à l'aide du modèle unidimensionnel. Les figures 2.2a et 2.2b représentent les résultats obtenus avec deux modèles distincts afin de modéliser les jonctions dans les conduites.

L'écoulement à travers les jonctions est complexe et tridimensionnel, ce qui affecte le niveau de précision avec lequel les caractéristiques de l'onde de pression sont estimées par le modèle 1D. Malgré les erreurs induites par de telles jonctions, la forme de l'onde de pression dans le système d'échappement est simulée de façon relativement précise.

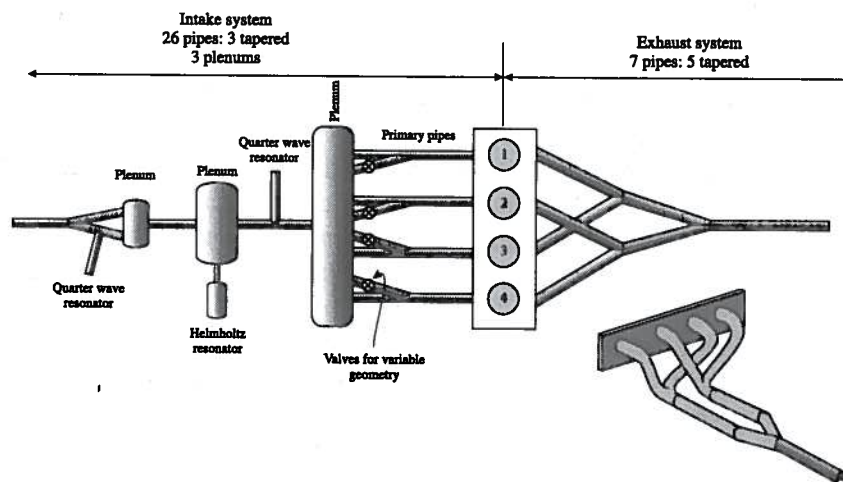


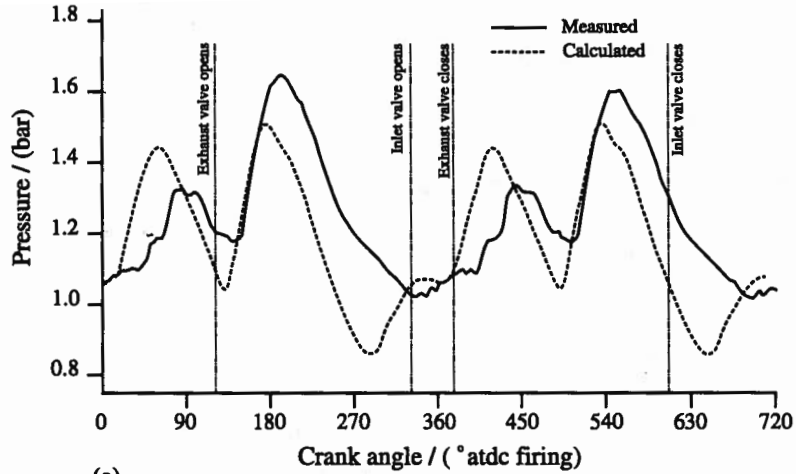
Figure 2.1 Représentation du banc d'essai pour évaluer la propagation de l'onde de pression dans un collecteur d'échappement (Winterbone and Pearson, 1999, fig. 5.5)

2.2 Modélisation quasi-stationnaire de la turbine

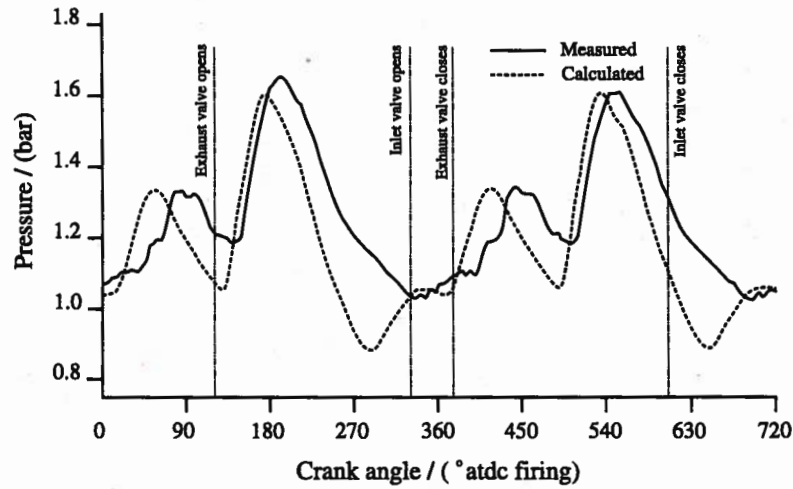
Les travaux sur l'étude et la prédiction des performances d'une turbine soumise à un écoulement instationnaire ont débuté dans les années 1960. Baines (2010) propose une revue des principales méthodes numériques qui ont été développées afin de prédire les performances des turbines d'un turbocompresseur. Quatre types de modèles sont détaillés, soit les modèles à zéro-dimension, les modèles simples à une-dimension, les modèles complexes à une-dimension et finalement les modèles à trois dimensions.

Parmi tous les types de modèles, les modèles tridimensionnels permettent la meilleure représentation des phénomènes physiques qui se produisent à l'intérieur de la turbine. Ces modèles permettent de simuler l'interaction entre le gaz et le rotor, les phénomènes d'écoulements secondaires et de turbulence. Par contre, ces modèles demandent des temps de calcul et des ressources informatiques importantes ce qui les rend moins adéquats pour l'analyse de plusieurs conditions d'opération.

Le modèle le plus simple est le modèle quasi-stationnaire, aussi appelé à zéro-dimension (0D). Le développement et l'application d'un modèle quasi-stationnaire est décrit par Benson (1982). Ce type de modèle utilise les cartes de turbine obtenues dans des conditions stationnaires afin de prédire les performances de la turbine dans des conditions instationnaires. Des coefficients, obtenus empiriquement, peuvent alors être intégrés afin de tenir compte des effets instationnaires sur les performances (Winterbone and Pearson, 1999). L'utilisation d'un modèle quasi-stationnaire est la plus fréquemment utilisée puisque la performance stationnaire



(a)



(b)

Figure 2.2 Pression mesurée et calculée dans la conduite en aval des jonctions - (a) jonction à pression constante, (b) jonction avec des pertes de pression (Winterbone and Pearson, 1999, fig. 5.7)

d'une turbine est normalement connue.

Une comparaison entre les caractéristiques d'une turbine mixte à deux entrées soumise à un écoulement instationnaire et les courbes caractéristiques de cette turbine en régime stationnaire est présentée par Costall (2007). Ces essais sont effectués à l'aide d'un générateur d'impulsions. La figure 2.3 illustre le montage expérimental utilisé. Le plan de mesure comprend une lecture de la variation dans le temps de la pression statique, de la température statique et du débit massique. De plus, une lecture de la moyenne temporelle de la température totale est effectuée dans le plan de mesure.

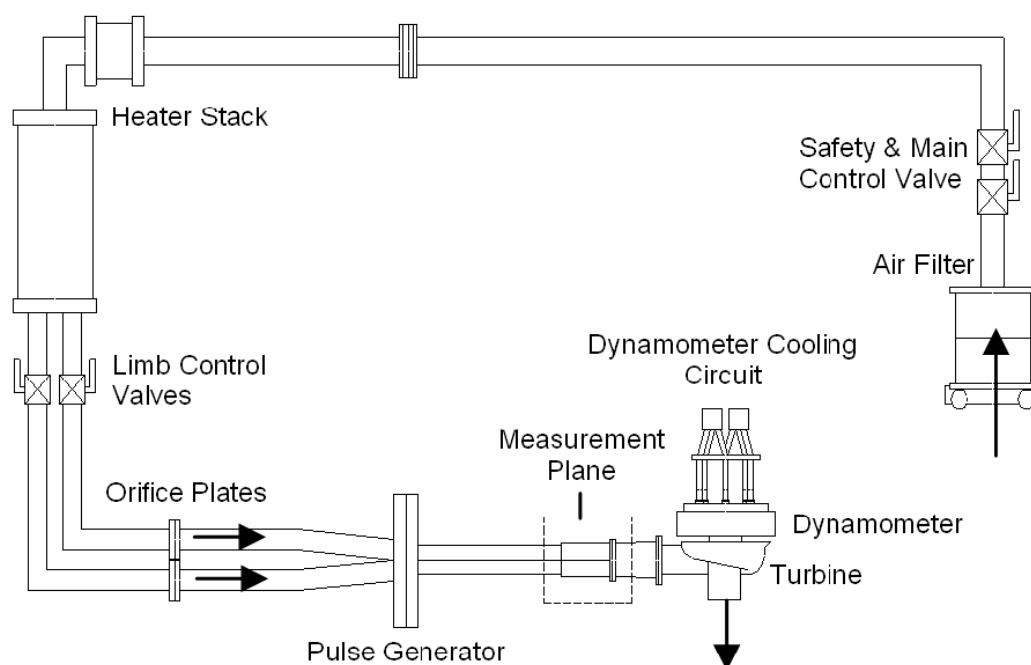


Figure 2.3 Représentation du banc d'essai pour évaluer la performance de la turbine d'un turbocompresseur (Costall, 2007, fig. 4.14)

Les essais sont effectués pour quatre différentes fréquences d'impulsions, soit 20, 40, 60 et 80 Hz. Les résultats, illustrés à la figure 2.4, indiquent que le rapport de pression à travers la turbine n'est pas relié par une courbe unique au débit massique tel qu'observé dans un écoulement stationnaire. Le comportement d'une turbine dans un écoulement instationnaire entraîne plutôt une certaine hystérésis, ce qui différencie le comportement instationnaire au comportement stationnaire. Il a été démontré que la turbine ne se comporte pas de manière quasi-stationnaire à cause des effets d'inertie à l'intérieur du volume de la turbine (voir Copeland et al., 2012).

2.3 Techniques de mesures expérimentales

Dans le cas de l'étude de l'écoulement à travers la conduite, les mesures expérimentales requises pour la modélisation du banc d'essai correspondent à la variation temporelle de la pression et de la température dans la composante moteur et de la pression à la sortie de la conduite. Cependant, pour la validation du modèle, les mesures expérimentales souhaitées sont l'évolution dans le temps de la pression, de la température et du débit massique, à une

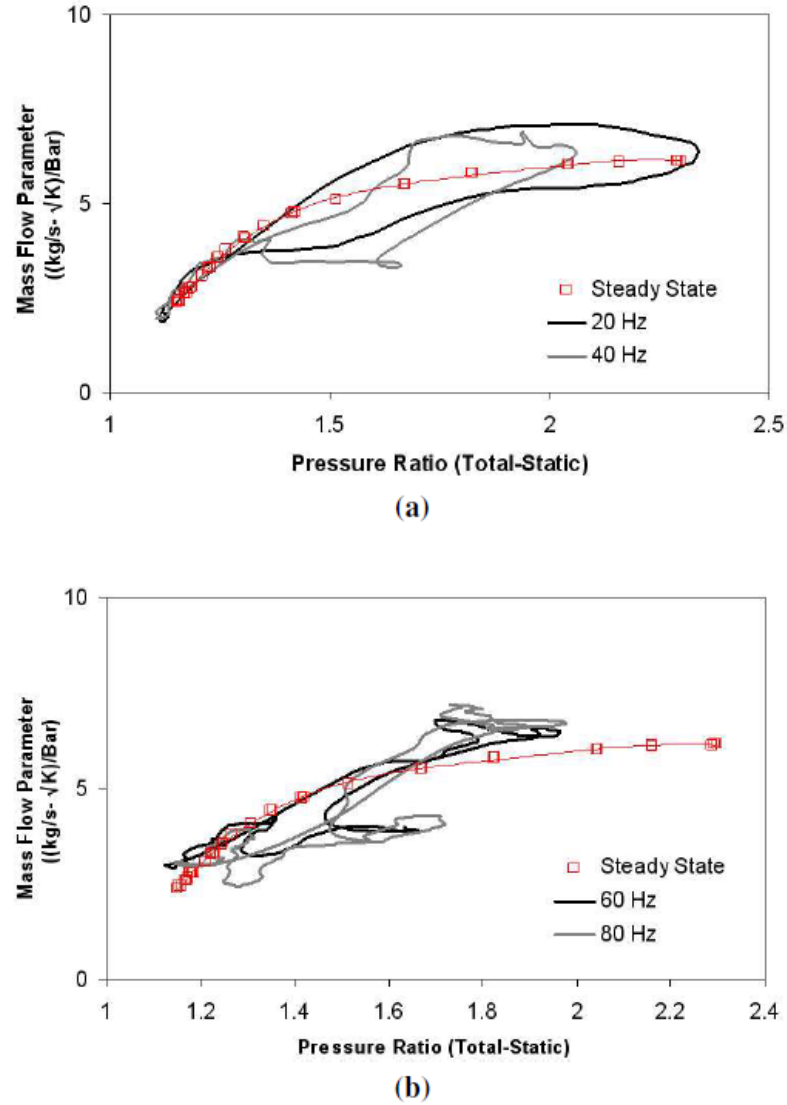


Figure 2.4 Variation du débit massique corrigé ($\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$) en fonction du rapport de pression (p_{01}/p_2) - (a) 20 Hz et 40 Hz, (b) 60 Hz et 80 Hz (Costall et al., 2006, fig. 3)

position donnée dans la conduite. Ces valeurs permettent ainsi de définir complètement les propriétés de l'écoulement dans le plan de mesure et de comparer les valeurs mesurées aux valeurs prédites par le modèle.

Lors de l'étude d'une turbine dans un écoulement instationnaire, les valeurs mesurées requises pour modéliser la turbine sont la variation temporelle de la pression et de la température en amont de la turbine, de même que la variation temporelle de la pression statique en aval de la turbine. Afin de valider le modèle, les valeurs mesurées du débit massique et du couple

instantané sont aussi souhaitables. Ces valeurs permettent de définir le comportement de la turbine dans l'écoulement instationnaire et de le comparer aux caractéristiques stationnaires. En général, l'observation du comportement instationnaire d'un fluide présente plusieurs difficultés. Comme les propriétés varient dans le temps, des instruments de mesure à haute fréquence sont requis afin de mesurer la variation des propriétés dans le temps à une position spatiale donnée. Prenons un cas général d'une fréquence d'évacuation des gaz chauds de 80 Hz. Selon le théorème de Nyquist-Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence du signal à mesurer, ce qui implique une fréquence d'échantillonnage supérieure à 160 Hz.

L'utilisation de capteurs de pression à haute fréquence est relativement commune puisque ces capteurs possèdent des temps de réponse élevés pouvant atteindre des fréquences d'acquisition de plus de 20 kHz. Tous les essais énumérés précédemment utilisent ce type de capteur afin de mesurer la variation temporelle de la pression statique. Parmi les travaux consultés, un seul auteur utilise un capteur de pression à l'aide d'un tube de Pitot afin de mesurer une pression totale (voir George et al., 2014). Par contre, aucune information n'est donnée relativement à la précision obtenue avec un tel dispositif et à l'erreur sur la lecture engendrée par le volume à l'intérieur du tube.

Contrairement aux sondes de pression, les thermocouples possèdent des temps de réponse beaucoup plus lents et sont donc moins propices à l'acquisition de données à haute fréquence. Les meilleurs temps de réponse pour un thermocouple sont d'environ 5 ms, ce qui correspond à une fréquence d'échantillonnage de 200 Hz. Par contre, ces temps de réponse sont obtenus à basse température (à température ambiante) et ces thermocouples possèdent des diamètres très faibles (0.001 pouce), ce qui les rend très fragiles et limités en température maximale.

Plusieurs techniques disponibles pour mesurer un débit massique dans un écoulement instationnaire sont présentées par Richtmyer (2010). L'inconvénient avec la mesure du débit est que les dispositifs sont sensibles aux fluctuations de température et requièrent donc une lecture de la variation temporelle de la température lorsque les gradients de température sont importants. De plus, la lecture du débit massique peut aussi être affectée par la composition du fluide.

Enfin, la mesure du couple délivrée par la turbine peut aussi être mesurée à haute fréquence. Certains instruments de mesure du couple dynamique permettent des temps de réponse relativement court, de l'ordre de 0.17 ms (6 kHz).

Bref, la lecture de la température et du débit massique instantané est beaucoup plus complexe lorsque les températures en jeu sont élevées. C'est pourquoi beaucoup de chercheurs utilisent un générateur d'impulsions lors de l'étude d'écoulements instationnaires. Ce dispositif permet alors de mesurer plus en détail les caractéristiques de l'écoulement.

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE

La méthodologie adoptée afin de valider les techniques de modélisation unidimensionnelles est présentée dans ce chapitre. Cette démarche consiste à développer un modèle 1D pouvant s'appliquer à la composante moteur à l'étude. Ce modèle pourra alors être validé avec des données expérimentales recueillies à l'aide de montages expérimentaux.

Dans un premier temps, les détails des montages expérimentaux sont présentés. Par la suite, le développement du modèle numérique, permettant de simuler l'écoulement instationnaire, est présenté.

3.1 Montages expérimentaux

Deux montages expérimentaux ont été mis en place dans le but de confirmer la validité du modèle unidimensionnel. Le premier montage a permis d'étudier l'écoulement instationnaire à travers une conduite tandis que le second montage a permis de mesurer les performances réelles d'une turbine dans un écoulement instationnaire. La configuration du banc d'essai pour chacun de ces essais est détaillée dans cette section.

Pour ces deux montages, l'écoulement instationnaire a été produit par une composante moteur dans laquelle les propriétés du gaz varient dans le temps. Les variations importantes de pression et de température à la sortie de la composante moteur sont induites par le cycle d'ouverture et de fermeture d'un dispositif à la sortie du moteur. Lorsque le dispositif d'échappement commence à ouvrir, les gaz à haute pression sont évacués dans la conduite. L'évacuation graduelle des gaz chauds induit des changements de pression et de température à l'intérieur du volume de la composante moteur. Cette variation temporelle des propriétés du gaz s'effectue de façon périodique dont la fréquence, notée f , est donnée par le nombre de cycles d'ouverture-fermeture du dispositif d'échappement par seconde.

Seules les pressions statiques ont été mesurées à haute fréquence durant les essais expérimentaux. Cette décision est basée sur la disponibilité des capteurs, la fiabilité des capteurs lorsque soumis à des températures élevées et à la facilité d'intégration de ces capteurs dans l'installation. Dans le cas à l'étude, les fréquences en jeu ($f > 50$ Hz) et les gradients de température ($\Delta T > 600$ K) sont trop importants pour obtenir la variation de la température dans le temps. Par conséquent, les propriétés autres que les pressions ont été mesurées à l'aide de capteurs à basse fréquence, ce qui a permis d'obtenir une moyenne dans le temps. Le système d'acquisition utilisé pour ces capteurs possède une fréquence d'échantillonnage

de 10 Hz.

Afin d'obtenir une variation détaillée de la pression dans le temps, le système d'acquisition de données utilisé pour les capteurs à haute fréquence possède une fréquence d'échantillonnage de 25 kHz. De plus, comme la température des gaz est élevée, l'utilisation de capteurs de pression à haute fréquence refroidis à l'eau a été nécessaire.

3.1.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite

Les premiers tests ont été effectués sans turbine afin d'observer uniquement l'évolution des propriétés de l'écoulement instationnaire à travers la conduite. Pour ce test, deux plaques à orifice sont insérées en série dans une conduite qui est reliée à la sortie de la composante moteur. Ces plaques à orifice permettent de simuler une restriction dans la conduite et d'observer leurs effets sur l'écoulement. La figure 3.1 illustre la configuration expérimentale testée.

Tout d'abord, l'air passe à travers un réchauffeur qui permet d'augmenter la température de l'air à l'entrée de la composante moteur. L'air passe ensuite par la composante moteur où le processus de combustion entraîne une hausse de la pression et de la température du fluide. Les gaz chauds à l'intérieur de la composante moteur sont ensuite évacués dans la conduite. La première section de la conduite, entre la composante moteur et la première plaque à orifice, possède un diamètre constant, notée D . La longueur de cette section correspond à dix fois le diamètre ($10D$). La deuxième section de la conduite, entre les deux plaques à orifice, possède aussi une longueur équivalente à $10D$. Cette conduite inclue aussi une section divergente à proximité de la deuxième plaque à orifice qui fait augmenter le diamètre de la conduite de D à $1.5D$. Enfin, à la sortie de la deuxième plaque à orifice, les gaz sont évacués dans le système d'échappement du banc d'essai.

L'objectif avec ce premier montage est de valider la partie du modèle qui permet de simuler uniquement l'écoulement instationnaire à travers la conduite. Comme la composante moteur à l'étude possède des caractéristiques différentes de celles des moteurs à piston conventionnels qui sont généralement étudiés dans la littérature, cette validation permet plus spécifiquement de déterminer si la forme de l'onde de pression et de l'onde de température générées par la composante moteur peuvent avoir un impact sur la validité du modèle.

Mis à part l'utilisation d'une nouvelle composante moteur, ce montage se distingue par rapport aux essais trouvés dans la littérature par l'utilisation de deux plaques à orifice. Ces plaques à orifice permettent de modifier les restrictions dans la conduite afin de simuler l'effet que pourrait avoir des composantes en aval de la composante moteur, telle qu'une turbine. Même si le comportement de l'écoulement à travers une plaque à orifice ne correspond pas

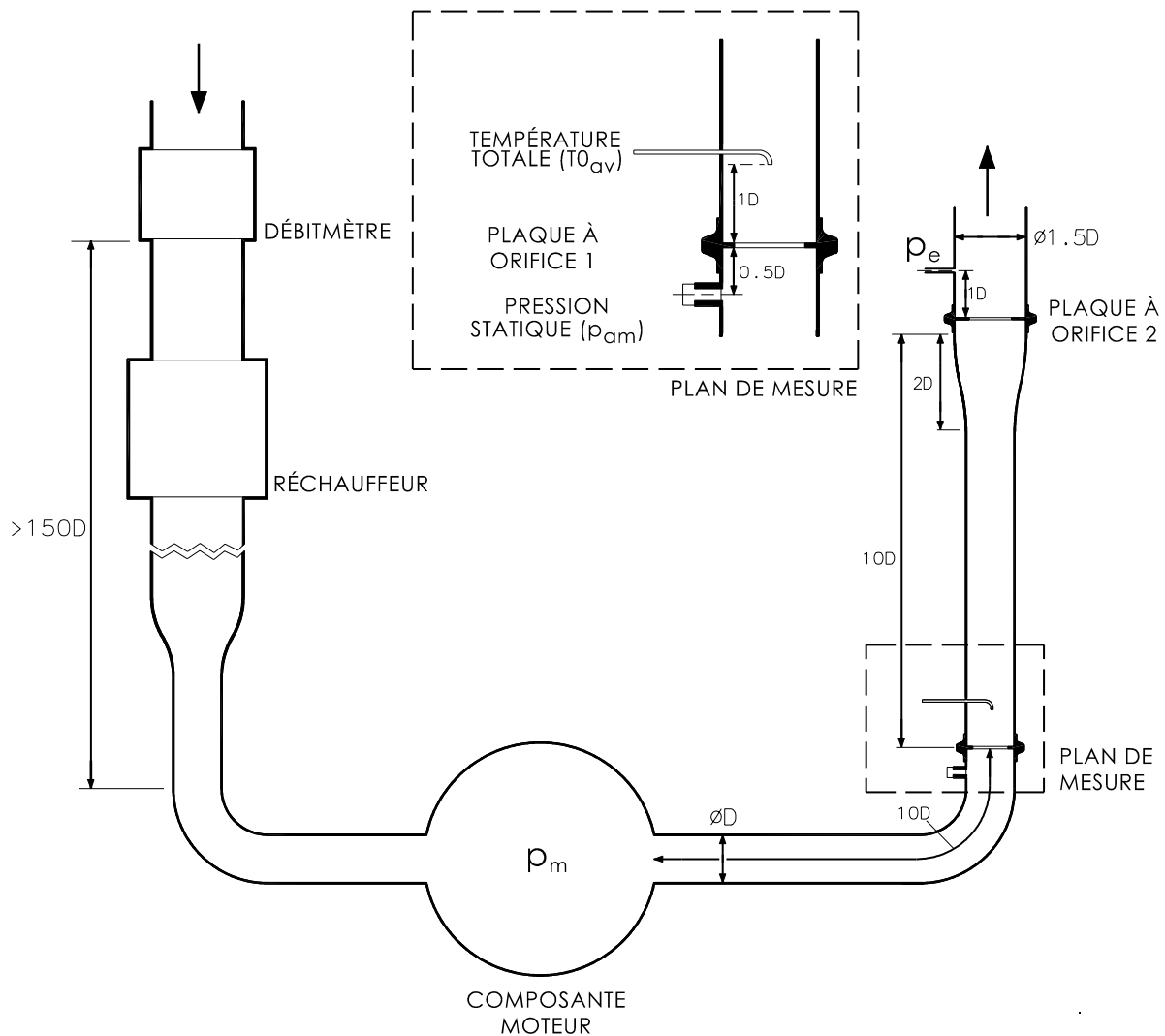


Figure 3.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Représentation du montage expérimental

à celui d'une turbine, l'utilisation de plaques à orifice est une façon simple d'observer les effets engendrés par des restrictions sur l'onde de pression dans la conduite et de valider si la réflexion des ondes de pression est bien capturée par le modèle numérique.

Mesures expérimentales

Les paramètres qui ont été mesurés expérimentalement se divisent en deux catégories, soient les paramètres requis pour la modélisation du montage expérimental et ceux nécessaires pour la validation du modèle.

Dans un premier temps, les paramètres requis pour la modélisation correspondent aux propriétés en amont et en aval de la conduite à modéliser. La pression et la température en amont de la conduite correspondent aux propriétés dans la composante moteur et sont respectivement notées p_m et T_m . La variation temporelle de la pression statique dans la composante moteur (p_m) est mesurée à l'aide d'un capteur de pression à haute fréquence situé à environ un diamètre (D) en amont de l'entrée de la conduite. L'installation de ce capteur est similaire à l'installation des capteurs de pression dans la conduite (voir fig. 3.1), c'est-à-dire que l'extrémité du capteur est à proximité de la paroi interne de la composante moteur. Par ailleurs, aucun instrument ne permet de mesurer la variation temporelle de la température dans la composante moteur (T_m). Cette propriété est calculée à l'aide d'un modèle de la composante moteur basé sur les paramètres géométriques de cette dernière. Ce modèle utilise la pression mesurée (p_m) et la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m}) afin d'estimer la température dans la composante moteur à chaque instant.

Pour compléter les mesures requises pour la modélisation de la conduite, une moyenne temporelle de la pression statique en aval de la deuxième plaque à orifice (p_e) a été mesurée. La section du banc d'essai en aval de la première plaque à orifice correspond à une section du banc d'essai qui était déjà existante et qui était utilisée pour tester uniquement la composante moteur. Il a été choisi de ne pas modifier cette section pour ces essais. Le principal inconvénient est que seule une moyenne temporelle de la pression à la sortie du deuxième orifice (p_e) a été mesurée. Par conséquent, la variation possible de la pression à la sortie de la deuxième plaque à orifice a été négligée dans le modèle.

Par la suite, trois paramètres mesurés servent à la validation du modèle, soient le débit massique à travers la conduite (\dot{m}), la pression statique en amont de la première plaque à orifice (p_{am}) et la lecture de la température totale en aval de cette plaque (T_{0av}).

La moyenne temporelle du débit massique en amont de la composante moteur ($\dot{m}_{coriolis}$) est mesurée à l'aide d'un débitmètre-masse de type Coriolis. Comme les effets instationnaires peuvent engendrer des erreurs de lecture sur la mesure du débit massique, une grande distance sépare le débitmètre-masse de l'entrée de la composante moteur. Ce volume permet ainsi d'atténuer les fluctuations de l'écoulement présentes à l'entrée de la composante moteur. Une faible quantité du débit massique mesuré est perdue (\dot{m}_{perte}) à travers la composante moteur. Ces pertes sont principalement dues aux fuites à travers différents mécanismes d'étanchéité. Ces fuites ne sont pas mesurées dans le banc d'essai mais sont estimées à partir de simplifications. De plus, afin de déterminer le débit massique qui passe à travers la conduite, le débit de carburant injecté dans la composante moteur (\dot{m}_f) est aussi considérée. Cette quantité a été mesurée à l'aide d'un débitmètre à turbine.

Ensuite, l'évolution de la pression statique en amont de la première plaque à orifice (p_{am}) a été mesurée à l'aide d'un capteur à haute fréquence. Ce capteur est situé à une distance correspondant à environ la moitié du diamètre de la conduite ($0.5D$) de la plaque à orifice. La moyenne temporelle de la température totale en aval du premier orifice ($T0_{av}$) a été mesurée à l'aide d'un thermocouple qui est inséré à l'intérieur de la conduite et qui fait face à l'écoulement. L'extrémité de ce capteur est situé à une distance D en aval de la plaque à orifice.

Le tableau 3.1 résume l'ensemble des valeurs mesurées pour ce montage expérimental. De plus, les détails des instruments de mesures utilisés sont présentés au tableau 3.3.

Tableau 3.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Valeurs mesurées

Valeurs mesurées	Symbole
Moyenne temporelle	
Débit massique en amont de la composante moteur	$\dot{m}_{coriolis}$
Débit massique de carburant	\dot{m}_f
Température totale en aval de la plaque à orifice 1	$T0_{av}$
Pression statique en aval de la plaque à orifice 2	p_e
Variation temporelle	
Pression statique à proximité de la sortie de la composante moteur	$p_m(t)$
Pression statique en amont de la plaque à orifice 1	$p_{am}(t)$
Constante dans le temps	
Fréquence du cycle d'ouverture-fermeture du dispositif d'échappement	f

3.1.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire

L'objectif de ce montage est de mesurer les performances réelles d'une turbine lorsque alimentée par un écoulement instationnaire. Plus précisément, on cherche à (a) mesurer la puissance nominale de la turbine à partir de la vitesse de rotation et du couple développé par l'arbre et (b) à identifier les propriétés transitoires à l'entrée et à la sortie de la turbine par l'acquisition de données à haute fréquence. Dans le cas de ce montage, seules les pressions statiques ont été mesurées à haute fréquence.

La figure 3.2 illustre le montage expérimental utilisé pour ces essais. La turbine testée correspond à une turbine à impulsion. La vitesse de cette turbine a été contrôlée à l'aide d'un dynamomètre hydraulique. Le dynamomètre utilisé correspond au modèle 400-012 de *KAHN* qui permet une vitesse de rotation maximale de 60,000 révolutions par minute et une puis-

sance délivrée maximale de 700 hp.

Le montage expérimental en amont de la composante moteur est identique à celui présenté pour le premier montage. À la sortie de la composante moteur, l'écoulement instationnaire traverse la conduite pour ensuite atteindre la turbine. La conduite est de section constante, dont le diamètre est défini par D . La sortie de la turbine est connectée à un plenum à grand volume où les gaz sont par la suite évacués dans le système d'échappement du banc d'essai.

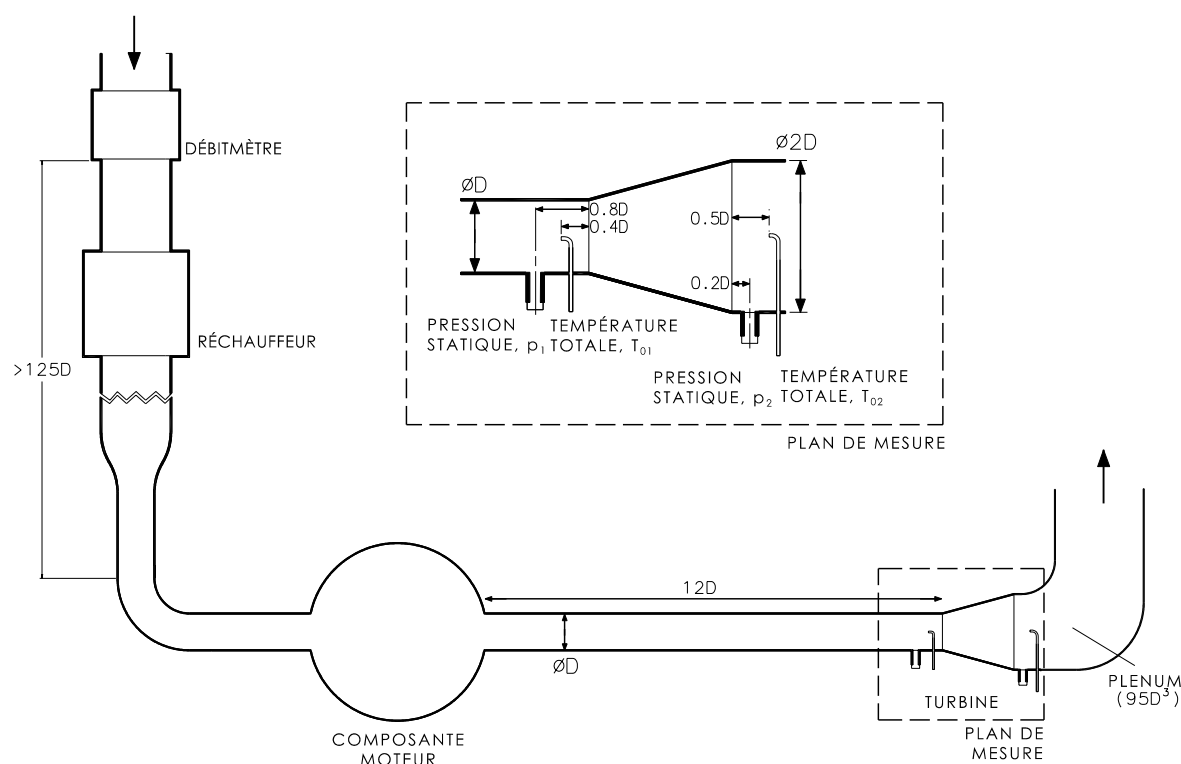


Figure 3.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Représentation du montage expérimental

Il a été choisi d'analyser la turbine dans l'écoulement instationnaire produit par la composante moteur afin d'avoir les conditions réelles (forme de l'onde de pression et de l'onde de température) à l'entrée de la turbine. Ces essais permettent donc de valider si le comportement de la turbine, lorsque soumis à l'écoulement instationnaire spécifique à la composante moteur à l'étude, s'approche d'un comportement quasi-stationnaire.

À noter que les caractéristiques stationnaires de la turbine ne sont pas connues et n'ont pas été mesurées. Une carte de performance générique d'une turbine à impulsion a été utilisée afin de prédire le comportement quasi-stationnaire de la turbine. Par contre, afin de représenter adéquatement la turbine actuelle, la carte de turbine utilisée a été mise à l'échelle à l'aide

de multiplicateurs. Plus de détails concernant la carte de performance et sa mise à l'échelle sont fournis lors du calage du modèle à la section 5.2.3.

Il faut noter que pour ce montage, il était impossible de modéliser fidèlement l'ensemble conduite-turbine puisque la composante moteur n'était pas instrumentée. La composante moteur utilisée pour ces essais est différente de celle testée dans le premier montage puisqu'elle permet d'avoir le débit massique adéquat afin d'alimenter la turbine. Contrairement au premier montage, la composante moteur utilisée avec la turbine n'est pas adaptée pour recevoir un capteur de pression. Par conséquent, la seule méthode possible pour simuler l'ensemble conduite-turbine à l'aide de ce montage est d'utiliser un modèle simulant le cycle complet de la composante moteur. Par contre, les incertitudes avec ce modèle sont trop importantes pour permettre une représentation fidèle des propriétés du fluide dans la composante moteur durant la phase d'échappement.

Mesures expérimentales

Dans le cas de ce montage, les mesures requises pour la modélisation de la turbine sont la variation temporelle de la pression statique en amont (p_1) et en aval (p_2) de la turbine. De plus, la moyenne temporelle de la température totale en amont (T_{01}) et en aval (T_{02}) de la turbine ont été mesurée. Les mesures en amont de la turbine ont été prises à l'intérieur de la conduite à proximité de l'entrée de la turbine. Le diamètre de la conduite à cette position correspond à la dimension D . Les valeurs mesurées en aval de la turbine sont mesurées dans la conduite à proximité du rotor de la turbine, où le diamètre de la conduite correspond à $2D$.

Pour valider le modèle, deux paramètres sont comparées, soit la moyenne temporelle du débit massique à travers la turbine et le couple délivré par la turbine. Comme pour le montage précédent, un débitmètre-masse de type Coriolis a permis de mesurer la moyenne temporelle du débit massique en amont de la composante moteur ($\dot{m}_{coriolis}$). Une perte (\dot{m}_{perte}) est ensuite déduite du débit massique mesurée pour tenir compte des fuites dans la composante moteur. Enfin, le débit de carburant (\dot{m}_f), mesurée par le débitmètre à turbine, est ajouté au débit massique d'air à l'entrée de la composante moteur pour avoir le débit total.

La vitesse de rotation de la turbine et le couple délivrée ont été mesurés par le dynamomètre. Le système d'acquisition utilisé pour ces capteurs est à basse fréquence (10 Hz). Il aurait pu être possible de mesurer le couple instantané en adaptant un capteur à jauges à haute fréquence au banc d'essai. Par contre, afin de limiter les coûts et les délais, il a été décidé de ne pas utiliser ce type d'instrumentation pour ce montage.

Le tableau 3.2 résume les valeurs mesurées pour ce montage expérimental.

Tableau 3.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Valeurs mesurées

Valeurs mesurées	Symbole
Moyenne temporelle	
Débit massique en amont de la composante moteur	$\dot{m}_{coriolis}$
Débit massique de carburant	\dot{m}_f
Température totale à l'entrée de la turbine	T_{01}
Température totale à la sortie de la turbine	T_{02}
Couple délivré par la turbine	τ
Vitesse de rotation moyenne de la turbine	N
Variation temporelle	
Pression statique à l'entrée de la turbine	$p_1(t)$
Pression statique à la sortie de la turbine	$p_2(t)$
Constante dans le temps	
Fréquence du cycle d'ouverture-fermeture du dispositif d'échappement	f

Le tableau 3.3 présente les modèles et les caractéristiques de tous les instruments de mesure utilisés pour les deux montages décrits précédemment. Seul le temps de réponse du débitmètre-masse de type Coriolis n'est pas fourni par le manufacturier (N/D : non disponible). Par contre, ce type d'instrument de mesure possède normalement un temps de réponse relativement élevé.

3.2 Développement du modèle

Cette section présente le développement du modèle unidimensionnel qui est divisé en deux grandes sections. Dans un premier temps, les équations régissant l'écoulement compressible, instationnaire et non-visqueux dans une conduite et la méthode numérique permettant de les résoudre est présentée. Par la suite, le développement des conditions aux frontières permet de calculer les interactions aux extrémités de la conduite sera décrit.

Le modèle présenté dans cette section est entièrement basé sur les travaux de Winterbone and Pearson (2000), Costall (2007) et Benson (1982). L'unique ajout est une condition frontière pour simuler l'écoulement à travers le dispositif à la sortie de la composante moteur lorsque l'ouverture est partielle. L'écoulement durant la phase d'ouverture de ce dispositif est particulier à la composante moteur testée et ne peut être simulé adéquatement à l'aide des

Tableau 3.3 Instruments de mesure utilisés pour les montages expérimentaux

Mesure	Instrument de mesure Modèle (fabricant)	Intervalle de mesure	Précision	Temps de réponse (ms)
Pression statique haute fréquence	Capteur de pression EWCRV-312 (Kulite)	25 - 2000 psi	$\pm 0.5\%$	0.2
Pression statique basse fréquence	Capteur de pression 9816 (Netscanner)	0 - 250 psi	$\pm 0.125\%$	50
Température totale	Thermocouple, Type K 040-2N-BKS (ARI Ind.)	0 – 1150°C	$\pm 0.5\%$	>25
Débit massique, air	Débitmètre-masse Coriolis CMF200 (Emerson)	0 - 16,100 kg/hr	$\pm 0.5\%$	N/D
Débit massique, carburant	Débitmètre à turbine ANC 8 (Cox Inst.)	16 - 1,633 kg/hr	$\pm 0.25\%$	3
Couple	Dynamomètre 400-012 (KAHN)	0 - 80 lb-ft	$\pm 0.2\%$	12
Vitesse de rotation	Dynamomètre 400-012 (KAHN)	0 - 60,000 rpm	$\pm 0.1\%$	12

conditions frontières existantes. Pour des raisons de confidentialité, aucun détail par rapport à cette condition frontière n'est mentionné dans ce rapport.

Une illustration générale du modèle numérique est présentée à la figure 3.3. Dans le modèle, la conduite est discrétisée en plusieurs volume ayant une longueur Δx . Pour chacun de ces volumes, l'évolution des propriétés dans le temps est évaluée à l'aide d'un schéma numérique. Par ailleurs, les propriétés de l'écoulement aux extrémités de la conduite sont calculées à l'aide de conditions aux frontières. Le calcul requis pour chaque extrémité dépendra de la nature de la frontière. Dans le cas où une turbine se trouve à l'extrémité de la conduite, une condition frontière permet de simuler l'effet de la turbine sur l'écoulement dans la conduite. Dans le cadre de ce travail, la turbine est simulée à l'aide d'un modèle quasi-stationnaire.

Afin de présenter le développement du modèle, les équations régissant l'écoulement à travers la conduite sont exposées dans un premier temps. Par la suite, le développement et l'application des conditions aux frontières, incluant la modélisation de la turbine, sont présentés.

3.2.1 Équations régissant l'écoulement

Dans le but de présenter le développement du modèle numérique, la première étape consiste à développer les équations mathématiques permettant de résoudre le problème. À partir de ces équations, la méthode numérique est dérivée. Seule la méthode utilisée dans le cadre de ce travail sera présentée dans cette section.

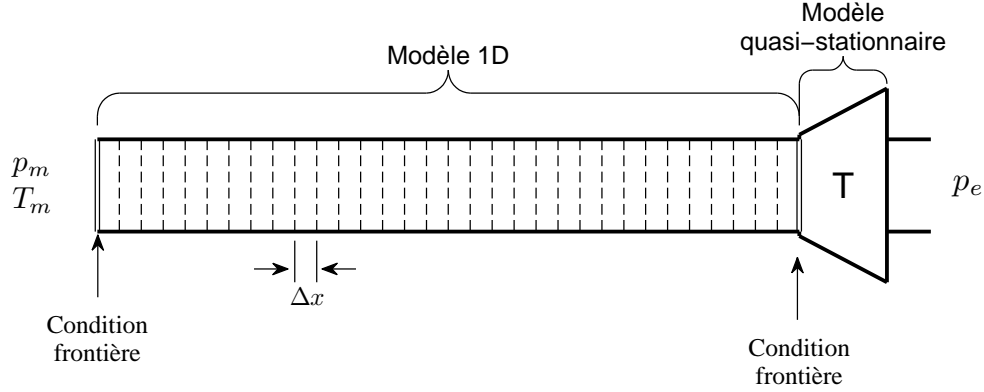


Figure 3.3 Représentation générale du modèle numérique

L'écoulement instationnaire dans un tuyau peut être simplifié par un modèle unidimensionnel lorsque les effets engendrés par de la turbulence et la viscosité du fluide sont négligeables. Lorsque la conduite présente des changements d'aire de section, un modèle quasi-unidimensionnel (quasi-1D) est alors nécessaire. Un modèle quasi-1D suppose que les propriétés du fluide sont uniformes à chaque section transversale du tuyau. Ce modèle est satisfaisant lorsque les variations d'aire de section se font graduellement. Il est alors possible de négliger la variation des propriétés dans la direction radiale. Par contre, il est important de noter qu'un modèle 1D ou un modèle quasi-1D est toujours une approximation par rapport à l'écoulement réel qui est un problème tridimensionnel.

L'écoulement étant transitoire, les propriétés du fluide sont donc fonction du temps (t) et de la position longitudinale (x) tandis que l'aire de la conduite (A) varie uniquement dans l'espace.

$$u = u(x, t), \quad p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t), \quad A = A(x)$$

Dans un premier temps, les lois de conservation permettent de développer un ensemble d'équations décrivant la variation des propriétés de l'écoulement grâce à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Deux équations d'état sont ensuite introduites afin de définir complètement les propriétés du fluide. Finalement, le développement de facteurs, permettant de modéliser les effets de la friction et du transfert de chaleur qui se produisent à la paroi de la conduite, est présenté.

Lois de conservation Les équations fondamentales de la mécanique des fluides sont définies par les lois de conservation. Afin de dériver ces équations, considérons une section infinitésimale du tuyau telle que présentée à la figure 3.4, où les propriétés sont uniformes

sur chacune des sections transversales. Sauf indication contraire, la vitesse de l'écoulement est considérée positive lorsque l'écoulement se déplace vers la droite.

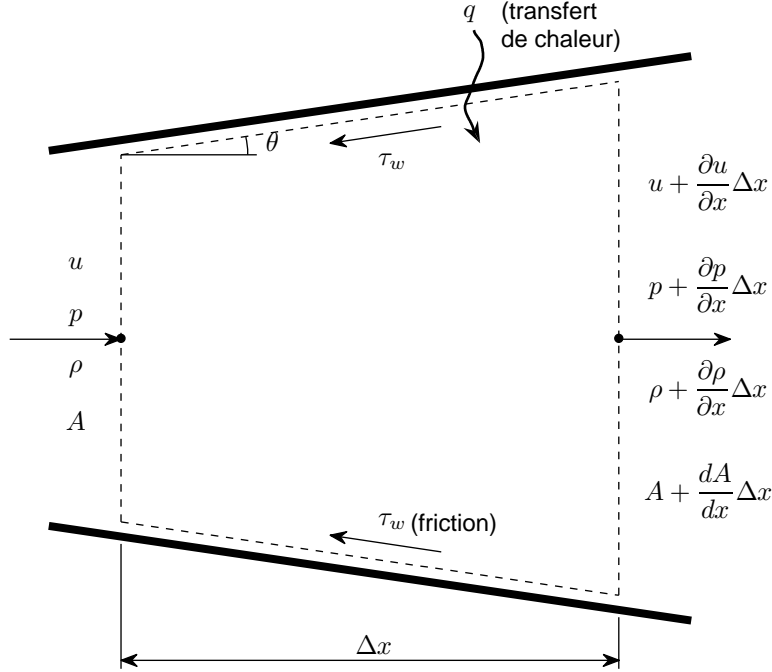


Figure 3.4 Volume de contrôle sur une section infinitésimale du tuyau

Le développement complet des équations de conservation est présenté à l'annexe A (sect. A.1). Seules les équations finales sont présentées dans cette section.

Conservation de la masse. La loi de la conservation de la masse est basée sur le principe que la masse ne peut être créée ni détruite. Cette loi peut s'écrire sous la forme différentielle suivante

$$\frac{\partial (\rho u A)}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial (\rho A \Delta x)}{\partial t} \quad (3.1)$$

Cette équation est générale puisqu'elle s'applique à n'importe quel écoulement instationnaire 1D qu'il soit visqueux ou non-visqueux et compressible ou incompressible.

Conservation de la quantité de mouvement. La conservation de la quantité de mouvement implique que le taux d'augmentation de la quantité de mouvement du fluide à travers le volume de contrôle est égal à la force nette exercée sur ce dernier. En l'absence de forces

volumiques, les seules forces présentes sont les forces de pression et de friction soumises aux surfaces du volume de contrôle. Par conséquent, l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire

$$\frac{\partial (\rho u A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 A)}{\partial x} \Delta x = p \frac{dA}{dx} \Delta x - \frac{\partial (pA)}{\partial x} \Delta x - \rho G A \Delta x \quad (3.2)$$

où la variable G correspond au terme de friction et est définie comme

$$G = \frac{1}{2} u |u| f \frac{4}{D} \quad (3.3)$$

La variable f correspond quant à elle au facteur de friction (cisaillement τ_w à la paroi) qui sera défini plus loin dans cette section.

Conservation de l'énergie. La conservation de l'énergie implique que le taux d'augmentation de l'énergie totale à travers le volume de contrôle égale le taux de transfert d'énergie à la paroi. En l'absence de travail, l'unique source d'énergie transmise à la paroi du tuyau est causée par le transfert de chaleur (q). L'équation de conservation de l'énergie pour le cas à l'étude correspond donc à

$$\frac{\partial (\rho e_0 A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u h_0 A)}{\partial x} \Delta x = \rho q A \Delta x \quad (3.4)$$

À noter que l'énergie interne totale et l'enthalpie totale sont définies par les relations suivantes

$$e_0 = e + \frac{1}{2} u^2 \quad (3.5)$$

$$h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho} \quad (3.6)$$

Les équations (3.1), (3.2) et (3.4) correspondent respectivement aux équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ce système d'équations peut s'écrire sous forme vectorielle telle que

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{W}) = 0 \quad (3.7)$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e_0 A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ \rho u (e_0 + p/\rho) A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G A \\ -\rho q A \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Les termes \mathbf{W} , $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{W})$ correspondent respectivement au vecteur d'état, des flux et des termes sources. Notons que lorsque la conduite est de section constante et qu'il n'y a ni friction et ni transfert de chaleur à la paroi, ce système d'équations se simplifie et devient

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

ce qui correspond aux équations d'Euler unidimensionnelles.

Ces équations sont dites sous forme conservative. Il est aussi possible d'écrire ses équations sous leur forme non-conservative en développant chaque terme de divergence à l'aide de l'identité vectorielle

$$\frac{\partial(ab)}{\partial x} = a \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial a}{\partial x}$$

Les équations d'Euler (éq. 3.9), pour une conduite de section constante sans friction ni transfert de chaleur, deviennent sous la forme non-conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial t} + u \frac{\partial e_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.12)$$

Théoriquement, les équations de conservation sous la forme conservative et non-conservative sont équivalentes. Ainsi, lorsque ces systèmes d'équations sont résolus analytiquement, les résultats obtenus sont identiques. Par contre, ces systèmes d'équations diffèrent lorsqu'ils sont résolus à l'aide de méthodes numériques. Lorsque les équations sous la forme non-conservative sont discrétisées, la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ne sont plus garanties. L'utilisation des équations sous leur forme conservative est particulièrement importante lorsque le problème peut comporter des discontinuités telles que des ondes de choc (Lomax et al., 2001).

Équations d'état Pour compléter le système d'équations, deux équations d'état sont requises. La première équation correspond à l'équation des gaz parfaits.

$$p = \rho RT \quad (3.13)$$

Cette équation permet de relier la température du fluide à la pression et à la masse volumique. À noter que l'équation des gaz parfaits est suffisamment précise pour les cas à l'étude puisque les gaz sont à haute température et à des pressions relativement basses.

La deuxième équation correspond à l'équation de l'énergie interne. Cette équation permet de calculer l'énergie interne en fonction de la température du fluide.

$$e = c_v T \quad (3.14)$$

Si le modèle suppose un gaz caloriquement parfait, alors la capacité thermique, c_v et la constante des gaz parfaits, R , sont considérées constantes pour tout le domaine. Sinon, il est possible de calculer ces propriétés en fonction de la pression et de la température locales du fluide.

Dans les cas à l'étude, l'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait est utilisée pour simuler l'écoulement dans la conduite. Cette hypothèse est une simplification de l'écoulement réel puisque la composition et les propriétés locales (température, pression) du fluide varient à l'intérieur du domaine. Selon Anderson (2003), l'écoulement peut être supposé caloriquement parfait pour un écoulement dont les températures sont en dessous de 1000 K à pression atmosphérique. Cependant, les températures observées dans les cas à l'étude peuvent dépasser 1000 K sur une courte période de temps. Cette simplification engendre nécessairement une erreur qui sera discutée au chapitre 5.

Modélisation de la friction aux parois Lors du développement de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (éq. 3.2), un facteur de friction, noté f , a été introduit. Ce facteur permet de calculer la force de friction, entre le fluide en mouvement et la paroi fixe, qui s'oppose au mouvement du fluide.

Le facteur de friction à la paroi est basé sur des équations empiriques. Costall (2007) recense plusieurs équations qui sont valides pour différentes gammes de nombre de Reynolds et de rugosité de la paroi du tuyau.

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini par la relation

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} \quad (3.15)$$

où la viscosité est évaluée à partir de l'équation de Sutherland

$$\mu = \frac{C_1^{3/2}}{T + C_2} \quad (3.16)$$

où pour l'air

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.458 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1/2} \\ C_2 &= 110.4 \text{ K} \end{aligned}$$

Dans le cas de cette l'étude, l'équation empirique utilisée est celle de Swamee and Jain (1976),

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (3.17)$$

qui est valide pour

$$5000 \leq Re \leq 10^8$$

et

$$10^{-6} \leq \frac{\epsilon}{D} \leq 10^{-2}$$

où ϵ correspond à la hauteur de la rugosité sur la paroi du tuyau. Cette équation a été sélectionnée puisqu'elle permet de couvrir toute la gamme des nombres de Reynolds pour les cas à l'étude.

Modélisation du transfert de chaleur Le terme $\rho q A$ dans l'équation de conservation de l'énergie (éq. 3.4), permet de modéliser le transfert de chaleur par convection entre le gaz et la surface du tuyau.

Le transfert de chaleur par unité de masse, q , est défini tel que

$$q = \frac{4h}{\rho D} (T_w - T_g) \quad (3.18)$$

où T_w correspond à la température de la paroi et T_g à la température locale du gaz.

Le coefficient de transfert de chaleur par convection, h , peut être considéré comme une fonction du nombre de Reynolds, et par conséquent, une fonction du coefficient de friction f

défini précédemment (Winterbone and Pearson, 2000).

$$h = \frac{f}{2} \rho u c_p \quad (3.19)$$

où $c_p = c_v + R$.

L'inconvénient principal à ce modèle est qu'il implique qu'il n'y a aucun transfert de chaleur lorsque la vitesse de l'écoulement est nulle. Par contre, comme les vitesses d'écoulement sont relativement élevées pour les cas à l'étude, ce modèle permet une approximation raisonnable.

Multiplicateur pour la friction et le transfert de chaleur Les coefficients de friction et de transfert de chaleur décrits dans les sections précédentes sont basés sur l'observation d'écoulements stationnaires. Tel que proposé par Costall (2007), des multiplicateurs pour la friction et le transfert de chaleur peuvent être ajoutés au modèle afin de tenir compte des effets instationnaires et de calibrer le modèle à l'aide de données expérimentales. Ces multiplicateurs sont respectivement notés f_M et q_M pour le coefficient de friction et le coefficient de transfert de chaleur.

Ces multiplicateurs doivent avoir uniquement des valeurs positives

$$\begin{aligned} f_M &\geq 0 \\ q_M &\geq 0 \end{aligned}$$

Un multiplicateur négatif dans le cas de la friction à la paroi impliquerait que la friction aide au mouvement du fluide, ce qui n'est pas plausible. Dans le cas du transfert de chaleur, un multiplicateur négatif impliquerait que le transfert de chaleur se produise de l'extérieur vers l'intérieur de la conduite. Dans le cas à l'étude, il est improbable que le transfert de chaleur se produise dans cette direction puisque la température des gaz dans la conduite est beaucoup plus élevée que celle de l'air ambiant.

Pour analyser un cas théorique sans friction ni transfert de chaleur, il suffit de mettre ces multiplicateurs à zéro. Si les phénomènes liés au transfert de chaleur ou à la friction sont plus importants que ceux prédits par les équations empiriques décrites précédemment, alors les multiplicateurs doivent être plus grand que 1. À l'inverse, si les équations empiriques surestiment la perte de chaleur ou la friction dans la conduite, alors les multiplicateurs doivent prendre des valeurs plus petites que 1.

Méthode numérique

Plusieurs méthodes numériques ont été développées afin de résoudre l'écoulement instationnaire, incompressible et unidimensionnel. La première méthode développée afin de résoudre les équations de propagation d'ondes non-linéaires est la méthode des caractéristiques qui fût proposée par Riemann en 1858. Cette approche fut la méthode dominante jusqu'en 1950, où des méthodes basées sur les différences finies commencèrent à être développées.

Les principaux inconvénients de la méthode des caractéristiques est qu'elle n'est pas conservative, ce qui ne garantit pas le respect des lois de conservation, et qu'elle ne capte pas fidèlement les gradients de pression importants tels que les ondes de choc. De plus, la précision de cette méthode est limitée à l'ordre 1 en espace et en temps. Malgré ces inconvénients, la méthode des caractéristiques est encore largement utilisée pour le développement des conditions aux frontières. L'application de cette méthode pour le développement des conditions est principalement exposée par Benson (1982).

Les méthodes par différences finies permettent de contrer les principaux défauts de la méthode des caractéristiques. Les algorithmes peuvent être écrits en utilisant la forme conservative des équations de conservation ce qui permet de garantir la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces algorithmes permettent aussi de capturer les discontinuités dans les propriétés de l'écoulement telles que celles causées par une onde de choc. Finalement, ces techniques possèdent une meilleure capacité pour simuler des gaz réels et des variations d'entropie.

Les méthodes numériques par différences finies peuvent être séparées en plusieurs familles. La première famille correspond au schéma de type Lax-Wendroff. Cette famille de méthodes est basée sur le développement en série de Taylor pour résoudre les dérivées partielles. Le développement mathématique et l'application des principaux schémas numériques de cette famille sont présentés par (Winterbone and Pearson, 2000). Une deuxième famille de schémas correspond aux schémas en amont qui reposent sur la résolution d'un problème de Riemann. Cette famille d'algorithmes est présentée par Toro (2009).

La famille de schémas numériques de type Lax-Wendroff est traditionnellement la principale famille de schémas utilisée pour la résolution de l'écoulement dans les collecteurs d'échappement (voir Costall, 2007; Winterbone and Pearson, 1999). Pour cette raison, cette famille de schéma a été adoptée dans le cadre de ce travail. Plus précisément, le schéma de Lax-Wendroff en deux étapes, qui permet une solution d'ordre 2 en temps et en espace, a été implémenté dans le modèle. Par ailleurs, il aurait été aussi possible d'implémenter une des nombreuses autres méthodes numériques par différences finies et des résultats similaires auraient pu être

obtenus.

Le schéma de Lax-Wendroff en deux étapes est basé sur la forme conservative des équations de conservation (éq. 3.7) et (éq. 3.8), soient

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{W}) = 0$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e_0 A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ \rho u (e_0 + p/\rho) A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G A \\ -\rho q A \end{bmatrix}$$

La figure 3.5 illustre la grille de calcul (x - t) pour cet algorithme. L'objectif consiste à calculer les propriétés à la position i et au temps $n + 1$ à partir des propriétés connues au temps n .

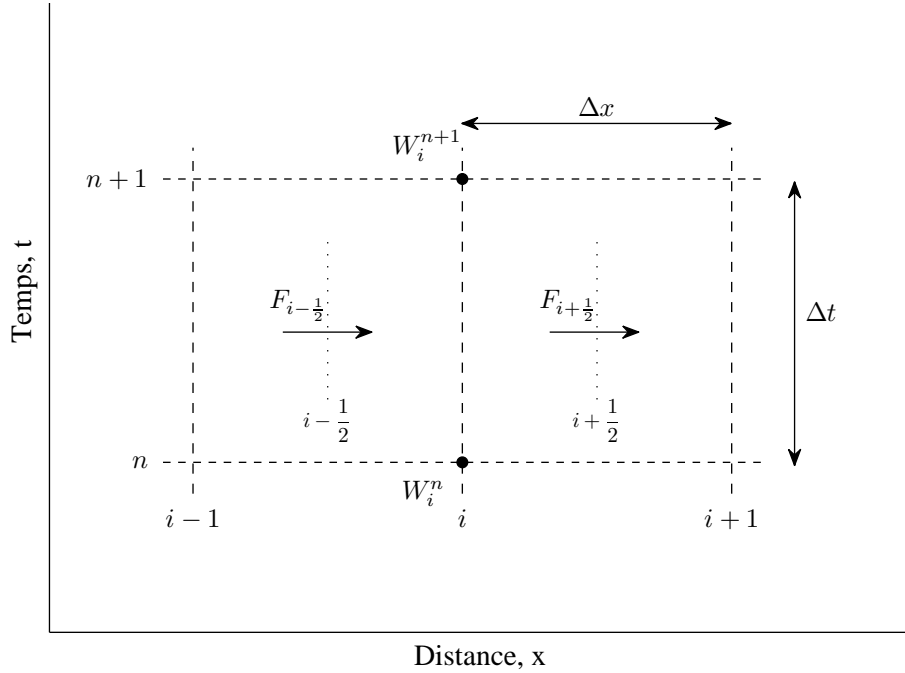


Figure 3.5 Variables de la méthode LW2 superposées à la grille de calcul (plan x - t)

La première étape est basée sur une formule centrée d'ordre 2 en temps et en espace autour du point $(i, n+1/2)$ tandis que la deuxième étape est basée sur une différence décentrée dans le temps et sur une différence centrée dans l'espace autour des points $(i+1/2, n)$ et $(i-1/2, n)$. Suite au développement mathématique de ces deux étapes, les équations suivantes sont obtenues.

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{C}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.20)$$

et

$$\mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{W}_{i+1}^n + \mathbf{W}_i^n \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n \right] - \frac{\Delta t}{4} \left[\mathbf{C}_i^n + \mathbf{C}_{i+1}^n \right] \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{W}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_{i-1}^n \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n \right] - \frac{\Delta t}{4} \left[\mathbf{C}_{i-1}^n + \mathbf{C}_i^n \right] \quad (3.21b)$$

Le développement mathématique de ces équations est présenté à l'annexe A (sect. A.2).

Discrétisation du domaine Afin de calculer les propriétés de l'écoulement dans la conduite, l'utilisateur du modèle doit déterminer la longueur des éléments du maillage à utiliser dans l'espace, Δx . La taille choisie sera dictée par un compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul. Par contre, la valeur des pas de temps, Δt , est imposée pour des considérations de stabilité. Le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est utilisé afin de calculer les pas de temps. Ce critère requiert que les ondes ne se propagent pas au-delà de la longueur du maillage (Δx) durant un incrément de temps.

Selon la théorie des ondes, la vitesse absolue maximale d'une onde est définie par

$$v = |u| + c$$

Par conséquent, le critère de CFL est satisfait si l'incrément de temps, au nouveau temps $n + 1$, est

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_{max}^n}$$

où la variable v_{max}^n correspond à la valeur maximale de v calculée au temps précédent.

De façon générale, le critère de CFL peut être écrit tel que, (Winterbone and Pearson, 2000)

$$\Delta t = \nu \frac{\Delta x}{v_{max}^n} \quad (3.22)$$

où

$$0 < \nu \leq 1$$

Le paramètre ν correspond au nombre de Courant et est choisi par l'utilisateur du modèle. Plus ce nombre est choisi petit, plus les pas de temps seront petits et par conséquent, plus le temps de calcul sera élevé. Il est donc nécessaire de choisir judicieusement le nombre de Courant à utiliser afin de limiter le temps de calcul. À l'inverse, un nombre de Courant

trop près de l'unité peut engendrer des instabilités dans certains cas particuliers. Il est donc recommandé d'utiliser un nombre de courant $\nu \leq 0.9$ (Winterbone and Pearson, 2000).

Limiteur de flux L'avantage des schémas numériques d'ordre 2 par rapport aux méthodes d'ordre 1 telle que la méthode des caractéristiques est qu'ils permettent d'obtenir des résultats plus précis. Par contre, les schémas centrés d'ordre 2 de Lax-Wendroff génèrent tous des instabilités lorsqu'il y a des taux de changement importants dans les propriétés du fluide. Pour contrer ce problème, des algorithmes appelés *total variation diminishing* (TVD) ont été développés afin d'éliminer l'apparition d'oscillations erronées dans la solution numérique.

La théorie relative au développement de ces méthodes est présentée par Winterbone and Pearson (2000). Afin de corriger la méthode de Lax-Wendroff en deux étapes pour qu'elle ne produise plus de fausses oscillations près des discontinuités, une correction est ajoutée au résultat obtenu précédemment, telle que

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n+1} + TVD_{corr} \quad (3.23)$$

Le calcul de cette correction est présenté à l'annexe A (sect. A.2.1). Cet algorithme est une approche simple qui permet de corriger les instabilités inhérentes aux techniques par différences finies d'ordre 2.

3.2.2 Développement des conditions aux frontières

Les équations développées à la section 3.2.1 permettent de calculer les propriétés du fluide à tous les nœuds de la grille de calcul ($x - t$) à l'exception de ceux qui se trouvent à chaque extrémité du domaine. Le calcul requis pour ces nœuds dépendra de la nature de la frontière.

Afin de présenter le développement des conditions aux frontières, la première étape consiste à présenter la méthode des caractéristiques qui correspond à la méthode numérique utilisée pour le calcul des conditions aux frontières. Par la suite, l'application de cette méthode pour le calcul des conditions aux frontières est décrite. Finalement, les équations nécessaires pour résoudre chacune des conditions possibles à la frontière de la conduite sont exposées.

Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une méthode numérique permettant de calculer les propriétés d'un écoulement à partir des équations développées précédemment. Malgré le développement de nouvelles techniques numériques plus exactes pour le calcul des écoulements

instationnaires, la méthode des caractéristiques est restée un outil pratique pour calculer les interactions aux frontières.

Le développement complet de la méthode des caractéristiques est présenté par Benson (voir Benson, 1982). Cette section présente uniquement un sommaire de la méthode. La formulation isentropique est présentée dans un premier temps puisqu'elle permet une présentation plus simple de la méthode.

Formulation isentropique La formulation isentropique est uniquement acceptable lorsque le niveau d'entropie du fluide est constant à travers tout le domaine. Par conséquent, cette simplification ne serait pas valable pour l'étude de l'écoulement à travers la conduite puisque le niveau d'entropie dans la conduite est modifié à chaque instant par l'écoulement qui est évacué par la composante moteur. Cependant, cette simplification peut être acceptable pour certaines conditions aux frontières.

La méthode des caractéristiques est basée sur la forme non-conservative des équations de conservation. Dans le cas de la formulation isentropique, la relation isentropique pour un gaz caloriquement parfait remplace l'équation de conservation de l'énergie. Cette relation relie la masse volumique à la vitesse du son telle que

$$\frac{\rho}{c^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{constante} \quad (3.24)$$

Il est alors possible de démontrer qu'il existe une caractéristique, notée λ , qui est constante le long d'une onde de perturbation se déplaçant dans la direction positive à une vitesse $u + c$. Cette caractéristique est définie comme

$$\lambda = c + \frac{\gamma - 1}{2}u \quad (3.25)$$

De façon similaire, il existe une caractéristique, notée β , qui est constante le long d'une onde de perturbation se déplaçant dans la direction négative à une vitesse $u - c$. Cette caractéristique est définie comme

$$\beta = c - \frac{\gamma - 1}{2}u \quad (3.26)$$

Les deux caractéristiques, λ et β , sont appelées les invariants de Riemann. Leurs développements mathématiques, à partir des équations de conservation, sont présentés à l'annexe A (sect. B.1.1).

La vitesse du fluide u et la vitesse du son c peuvent être obtenues à partir des invariants de

Riemann en réarrangeant les équations (3.25) et (3.26), ce qui donne

$$c = \frac{\lambda + \beta}{2} \quad (3.27)$$

$$u = \frac{\lambda - \beta}{\gamma - 1} \quad (3.28)$$

Pour mieux comprendre la signification physique de ces caractéristiques, considérons la grille de calcul présentée à la figure 3.6. L'onde λ , se déplaçant vers la droite avec une vitesse $u + c$, se trouvait à la position L au temps précédent n et atteint le point i au temps $n + 1$. De façon similaire, l'onde β , se propageant vers la gauche avec une vitesse $u - c$, se trouvait à la position R au temps n et se retrouve au point i au temps $n + 1$.

Si la vitesse du fluide est nulle, alors les deux ondes se déplacent à la même vitesse, soit à la vitesse du son. À l'inverse, si la vitesse du fluide est non-nulle, alors la propagation de l'onde de droite, notée δx_L et la propagation de l'onde de gauche, notée δx_R , sont différentes pendant l'incrément de temps Δt .

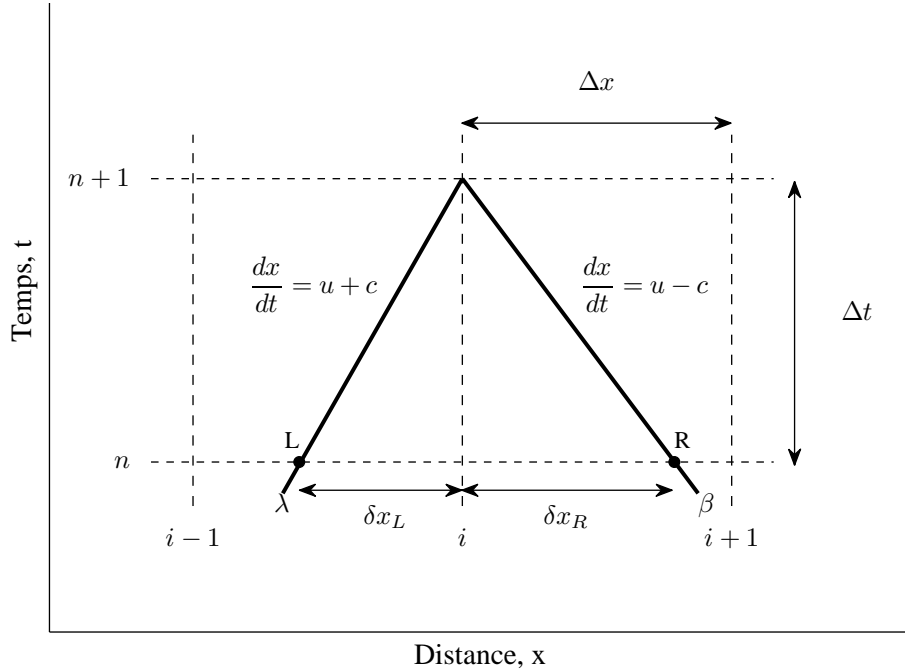


Figure 3.6 Invariants de Riemann superposés à la grille de calcul (plan x - t)

Comme les invariants de Riemann sont constants le long de leurs droites caractéristiques

respectives, les valeurs de λ et β au temps $n + 1$ correspondent à

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_L \quad (3.29a)$$

$$\beta_i^{n+1} = \beta_R \quad (3.29b)$$

La vitesse du son et la vitesse du gaz peuvent alors être calculées au nouveau temps $n + 1$ à l'aide des équations (3.27) et (3.28).

Par ailleurs, les valeurs des invariants de Riemann aux points L et R sont évaluées à l'aide d'une interpolation linéaire entre les points qui leurs sont adjacents au temps n.

$$\lambda_L^n = \lambda_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\lambda_i^n - \lambda_{i-1}^n) \quad (3.30a)$$

$$\beta_R^n = \beta_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\beta_{i+1}^n - \beta_i^n) \quad (3.30b)$$

où

$$\delta x_L = x_i - x_L \quad (3.31a)$$

$$\delta x_R = x_i - x_R \quad (3.31b)$$

Les gradients dans ces équations correspondent respectivement à

$$\frac{\delta x_L}{\Delta x} = \frac{\Psi \lambda_i^n - \Phi \beta_i^n}{\Delta x / \Delta t + \Psi (\lambda_i^n - \lambda_{i-1}^n) - \Phi (\beta_i^n - \beta_{i-1}^n)} \quad (3.32a)$$

$$\frac{\delta x_R}{\Delta x} = \frac{\Phi \lambda_i^n - \Psi \beta_i^n}{\Delta x / \Delta t + \Phi (\lambda_{i+1}^n - \lambda_i^n) - \Psi (\beta_{i+1}^n - \beta_i^n)} \quad (3.32b)$$

où

$$\Psi = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}, \quad \Phi = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}$$

Le développement mathématique de ces équations est présenté à l'annexe A (sect. B.1.2).

Formulation non-isentropique Lors de l'étude des interactions aux frontières, la formulation isentropique est uniquement valable lorsque la variation d'entropie entre l'intérieur de la conduite et la frontière peut être négligée. Par exemple, considérons une extrémité ouverte d'une conduite. Si l'écoulement de cette conduite se déverse dans un réservoir alors l'augmen-

tation d'entropie entre l'intérieur de la conduite et la sortie de la conduite peut être négligée. À l'inverse, si le fluide dans le réservoir entre dans la conduite, alors le niveau d'entropie du fluide provenant du réservoir n'est pas nécessairement égal au niveau d'entropie dans la conduite. Dans ce cas, la formulation non-isentropique de la méthode des caractéristiques est nécessaire puisque l'entropie du fluide dans le réservoir vient modifier le niveau d'entropie dans la conduite.

Lorsque l'évolution n'est pas isentropique, alors les invariants de Riemann ne sont plus constants le long de leurs droites respectives. Une correction doit donc être appliquée telle que

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_L + d\lambda_L \quad (3.33a)$$

$$\beta_i^{n+1} = \beta_R + d\beta_R \quad (3.33b)$$

L'évaluation de ces corrections sera exposée dans la section qui suit.

Application de la méthode des caractéristiques au calcul des conditions aux frontières

Pour simplifier l'étude des conditions aux frontières, les invariants de Riemann λ et β sont remplacés par les variables λ_{in} et λ_{out} . Ce changement de variables permet ainsi de développer des équations générales indépendamment que la frontière soit du côté droit ou gauche du domaine. La figure 3.7 illustre cette nouvelle nomenclature. λ_{in} correspond alors à l'onde de perturbation s'approchant de la frontière tandis que λ_{out} correspond à l'onde de perturbation qui est renvoyée dans la conduite.

Par conséquent, pour une frontière à l'extrémité droite, les caractéristiques d'entrée et de sortie correspondent à

$$\lambda_{in} = \lambda \quad (3.34a)$$

$$\lambda_{out} = \beta \quad (3.34b)$$

tandis que pour une frontière de gauche,

$$\lambda_{in} = \beta \quad (3.35a)$$

$$\lambda_{out} = \lambda \quad (3.35b)$$

De façon générale, en définissant la vitesse positive lorsqu'elle est en direction de la frontière,

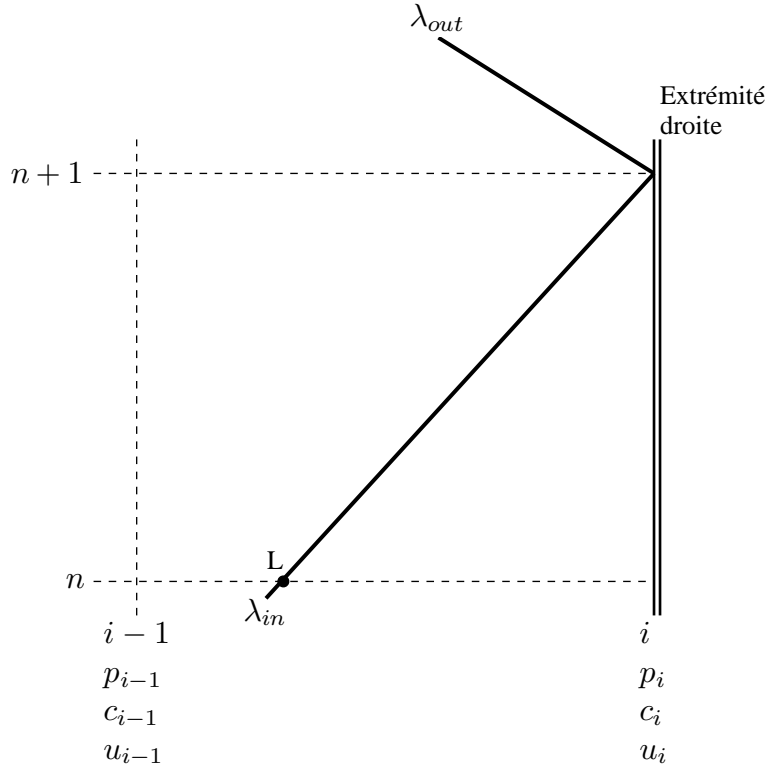


Figure 3.7 Nomenclature des invariants de Riemann pour le calcul des conditions aux frontières

les équations (3.27) et (3.28) deviennent

$$c = \frac{\lambda_{in} + \lambda_{out}}{2} \quad (3.36)$$

$$u = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{\gamma - 1} \quad (3.37)$$

Il est aussi utile de définir une variable permettant de caractériser le niveau d'entropie du fluide. Pour ce faire, supposons qu'un fluide, avec une vitesse du son c et une pression p , subit une évolution isentropique jusqu'à une pression de référence, notée p_{ref} . La vitesse du son qu'atteint le fluide est alors notée c_s telle qu'illustrée sur la figure 3.8. Ce paramètre reflète ainsi le niveau d'entropie du fluide.

La variable c_s est calculée à l'aide de la relation isentropique pour un gaz caloriquement parfait.

$$c_s = c \left(\frac{p_{ref}}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (3.38)$$

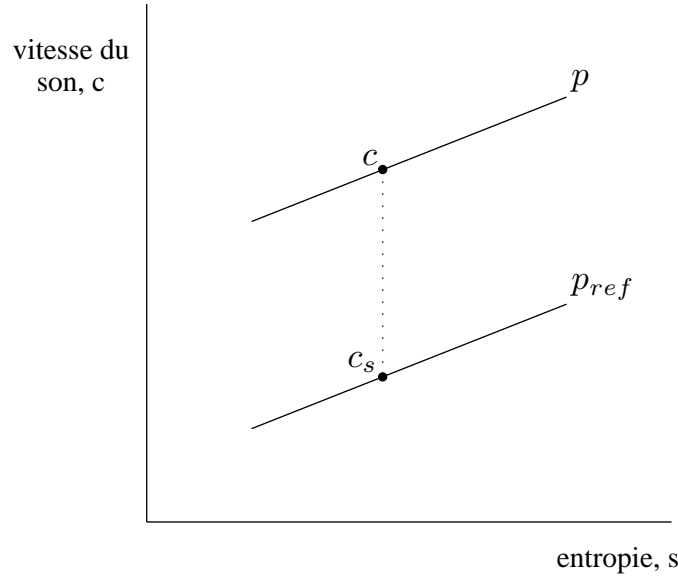


Figure 3.8 Calcul du niveau d'entropie

À noter que la valeur de p_{ref} est fixée arbitrairement.

Lorsque l'évolution à la frontière est isentropique, alors le niveau d'entropie (c_s) à la frontière est égal au niveau d'entropie dans la conduite. Le niveau d'entropie dans la conduite est calculé à partir des propriétés de l'écoulement à la position L au temps n pour le cas illustré à la figure 3.7.

Lorsque la formulation non-isentropique de la méthode des caractéristiques doit être appliquée, alors le niveau d'entropie à la frontière ne correspond plus au niveau d'entropie dans la conduite. Par conséquent, il faut faire une distinction entre le niveau d'entropie dans la conduite (au temps n et à la position L) et le niveau d'entropie à la frontière (au temps $n+1$ et à la position i) .

Le niveau d'entropie et la caractéristique dans la conduite, calculé au point (L, n), sont dits non-corrigés et sont notés $(c_s)_n$ et λ_{in_n} tandis que le niveau d'entropie et la caractéristique à la frontière (i, n+1) correspondent aux valeurs corrigées et sont notés $(c_s)_c$ et λ_{in_c} .

Comme décrit précédemment, pour le cas non-isentropique, les caractéristiques ne sont pas constantes le long de leurs droites respectives et par conséquent une correction doit être appliquée (voir éq. 3.33). Par conséquent, la valeur corrigée de la caractéristique d'entrée est calculée telle que

$$\lambda_{in_c} = \lambda_{in_n} + d\lambda_{in} \quad (3.39)$$

où la correction est définie comme

$$d\lambda_{in} = \left(\frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \right) \left(\frac{(c_s)_c - (c_s)_n}{(c_s)_c} \right) \quad (3.40)$$

λ_{out_c} correspond à la caractéristique de sortie et dépendra de la nature de la frontière.

Conditions aux frontières

Toutes les conditions frontières décrites dans la section qui suit sont basées sur le travail de Benson (1982). Seules les conditions aux frontières requises dans le cadre de ce travail sont présentées. Un ensemble plus large de conditions aux frontières est exposé par Benson (1982).

Les conditions aux frontières peuvent généralement être simplifiées à l'aide d'un modèle quasi-stationnaire. Cette simplification est valable lorsque la frontière possède une longueur relativement faible, ce qui permet de modéliser la frontière comme un volume infinitésimal. Ainsi, le taux de changement des propriétés dans l'espace est beaucoup plus important que dans le temps. Par conséquent, la frontière ne possède pas la capacité d'emmagasiner de la masse ou de l'énergie. La conséquence de cette simplification est que la région autour de la frontière, où des effets tridimensionnels sont engendrés, est modélisée par un volume infinitésimal tel qu'illustré à la figure 3.9.

Toutes les frontières présentées dans cette section sont analysées à l'aide d'un modèle quasi-stationnaire. Par conséquent, les interactions aux frontières sont calculées à partir des équations unidimensionnelles développées pour un écoulement permanent. Vu l'hypothèse d'une longueur infinitésimale, la friction et le transfert de chaleur à la paroi sont négligés. L'application de ces équations permet ainsi de calculer les propriétés du fluide à la frontière à chaque pas de temps.

À noter que le développement mathématique de toutes les frontières présentées dans cette section est exposé à l'annexe B.

Extrémité fermée Lorsque l'extrémité de la conduite est fermée, aucun écoulement ne peut être transmis. Par conséquent, la vitesse à la frontière est nulle. À partir de l'équation (3.37), il est clair que pour cette frontière

$$\lambda_{out} = \lambda_{in} \quad (3.41)$$

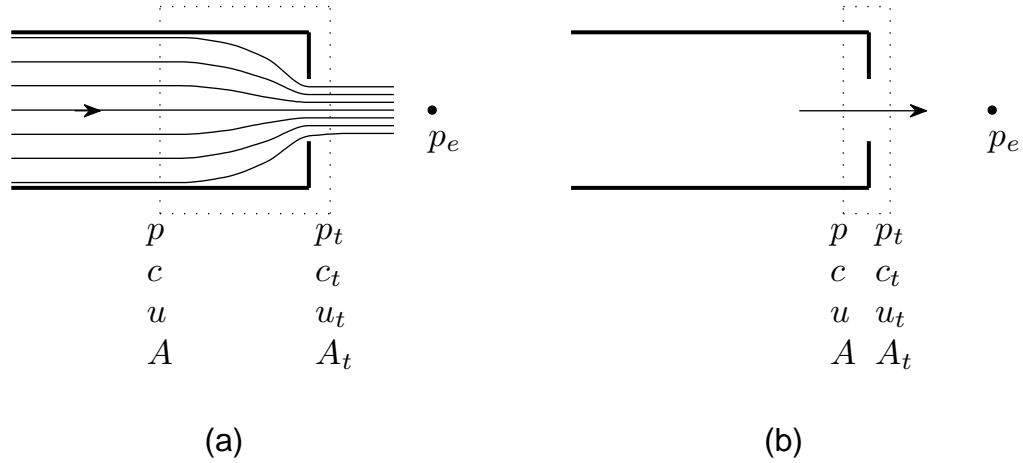


Figure 3.9 Conditions aux frontières - (a) représentation de l'écoulement réel à proximité de la frontière, (b) représentation des conditions aux frontières à l'aide du modèle quasi-stationnaire

Physiquement, cette frontière implique que lorsqu'une onde incidente atteint l'extrémité fermée, elle est alors réfléchiée en une onde de la même amplitude dans le sens inverse. Ce phénomène est illustré sur la figure 3.10 à l'aide d'une onde incidente qui se trouve à l'entrée de la conduite au temps initial, $t = 0$ et qui se propage vers l'extrémité fermée.

Une extrémité fermée n'est pas un type de frontière qui est requis dans la configuration à l'étude. Par contre, cette condition frontière est l'unique frontière qui peut être vérifiée à l'aide d'une solution analytique. Cette vérification, qui permettra principalement de vérifier l'implémentation de la méthode des caractéristiques pour le calcul des conditions aux frontières, sera présentée à la section 4.2.1.

Extrémité ouverte Lorsque l'extrémité de la conduite est ouverte à l'atmosphère ou à un réservoir, cette frontière peut admettre un écoulement dans les deux directions, soit un écoulement qui entre dans la conduite ou un écoulement qui sort de la conduite. Dans le cas à l'étude, cette condition frontière permet essentiellement de simuler l'écoulement à l'entrée de la conduite, lorsque cette extrémité est complètement ouverte. La direction de cet écoulement s'effectuera principalement du réservoir vers la conduite. Par contre, il est possible de ren-

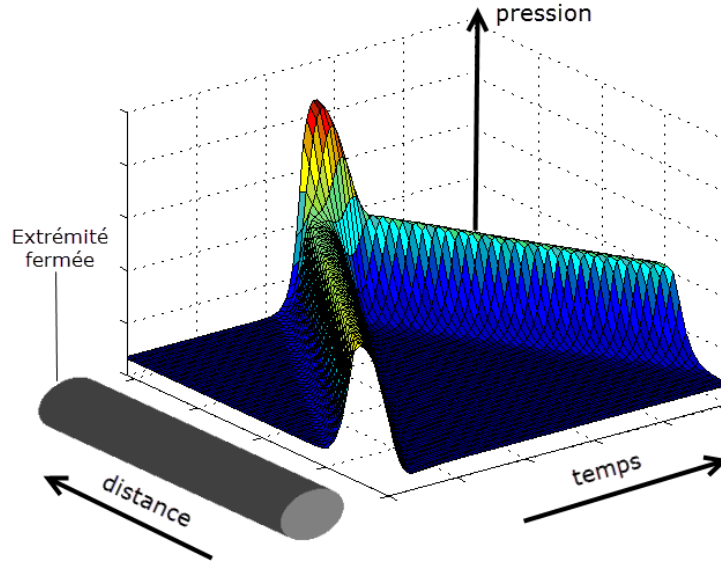


Figure 3.10 Représentation isométrique de la réflexion de l'onde incidente à une frontière fermée

contrer certaines conditions pour lesquelles l'écoulement est inversé à l'entrée de la conduite sur une courte période de temps. Par conséquent, il est important de traiter les deux cas. Le diagramme de flux, présenté à la figure B.1 de l'annexe B, résume les étapes de calcul pour une extrémité ouverte.

Débit sortant. Le développement des équations pour un écoulement qui se déverse dans un réservoir ou dans l'atmosphère est basé sur l'hypothèse que la pression à la frontière égale la pression à l'extérieur du tuyau. En supposant une évolution isentropique, cette frontière est définie par la relation

$$\lambda_{out} = 2c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - \lambda_{in} \quad (3.42)$$

où p_e correspond à la pression extérieure.

En pratique, dus aux effets tridimensionnels à la frontière, la pression de l'écoulement atteint réellement la pression extérieure à une certaine distance après avoir franchie la frontière du tuyau. Cette distance correspond approximativement au diamètre de la conduite (Winterbone and Pearson, 2000). Pour simuler cet effet, il suffit d'augmenter la longueur effective de la conduite dans la simulation. Cependant, l'écoulement inversé à l'entrée de la conduite ce produit généralement que sur une courte période de temps puisque la pression dans la

composante moteur est normalement plus élevée que la pression dans la conduite pour la majorité du cycle d'évacuation des gaz d'échappement. Par conséquent, cet effet est négligé dans le modèle.

Physiquement, cette frontière a pour effet d'inverser l'onde de perturbation qui atteint l'extrémité ouverte. Par conséquent, une onde de compression est réfléchiée en une onde de raréfaction de plus faible amplitude et vice-versa. Cet effet est illustré sur la figure 3.11. Cette figure montre une onde de raréfaction à l'entrée de la conduite qui se déplace vers l'extrémité ouverte de la conduite et qui est réfléchiée en une onde de compression.

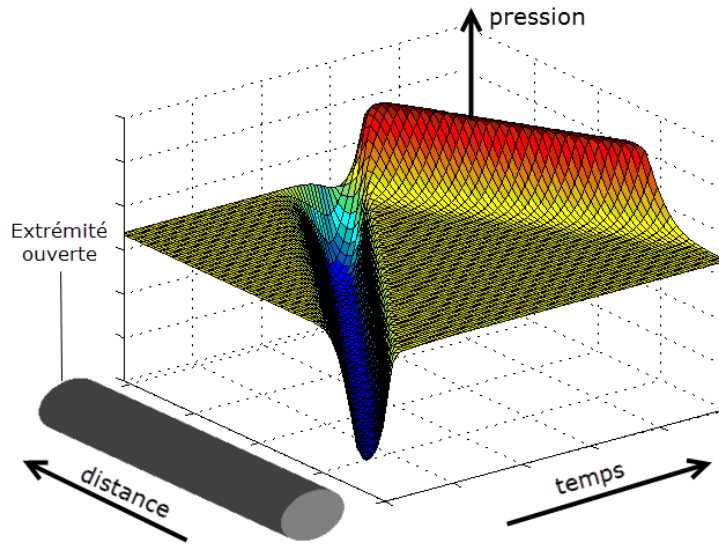


Figure 3.11 Représentation isométrique de la réflexion de l'onde incidente à une frontière ouverte

Débit entrant. Pour une frontière ouverte avec un débit entrant, il est supposé que le gaz qui entre dans la conduite subit une détente isentropique des conditions du réservoir, c_0 et p_0 , aux conditions à l'entrée du tuyau, c et p , tel qu'illustré à la figure 3.12. La vitesse maximale que peut atteindre le fluide à l'entrée de la conduite est alors limitée à $u = c$.

Pour ce cas, le niveau d'entropie à la frontière, noté $(c_s)_c$, correspond au niveau d'entropie du fluide dans le réservoir. Par conséquent, comme le niveau d'entropie à la frontière n'est pas nécessairement égal au niveau d'entropie dans la conduite au temps précédent, alors la formulation non-isentropique de la méthode des caractéristiques doit être utilisée.

Si l'écoulement est subsonique à l'entrée de la conduite, alors la solution est donnée par

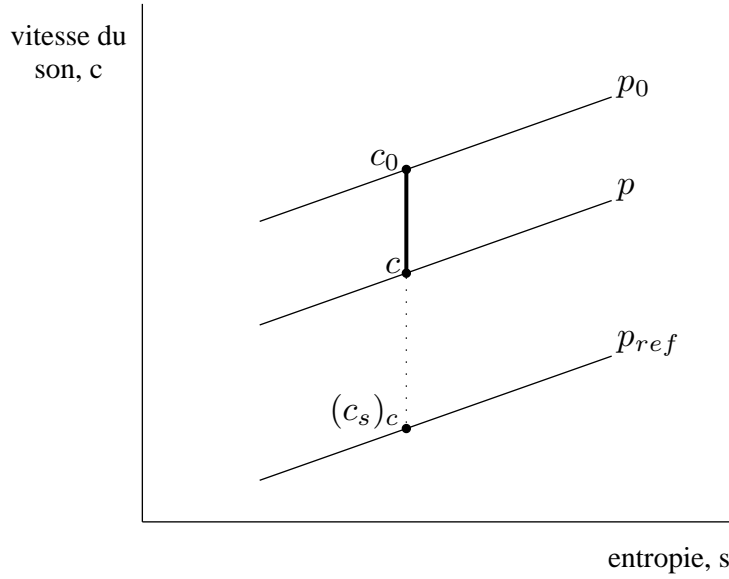


Figure 3.12 Modélisation d'une extrémité ouverte, débit entrant

l'équation

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \right) \lambda_{inc} + \frac{2}{\gamma + 1} \sqrt{(\gamma^2 - 1) c_0^2 + 2(1 - \gamma) \lambda_{inc}^2} \quad (3.43)$$

Cependant, lorsque l'écoulement est critique à l'entrée de la conduite, la vitesse du gaz est égale à la vitesse du son et la solution est dictée par

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right) \lambda_{inc} \quad (3.44)$$

Extrémité partiellement ouverte Plusieurs phénomènes physiques ou mécanismes peuvent être simulés comme une frontière partiellement ouverte. Cette frontière permet de simuler la contraction de l'écoulement à l'entrée de la conduite lorsqu'un coefficient de décharge est utilisé. Elle permet aussi de simuler l'écoulement à travers différents dispositifs tels qu'une soupape, une valve ou une plaque à orifice.

La géométrie de cette extrémité est donnée par le rapport des aires, noté ϕ ,

$$\phi = \frac{A_t}{A} \quad (3.45)$$

où A_t correspond à l'aire effective de passage dans la restriction. Cette valeur doit donc tenir compte du coefficient de décharge, C_d . Par définition,

$$0 < \phi < 1$$

Lorsque $\phi = 1$, la frontière correspond à une extrémité ouverte tandis qu'à l'opposé, lorsque $\phi = 0$, la frontière correspond à une extrémité fermée.

Comme pour le cas de l'extrémité ouverte, cette frontière peut admettre un écoulement dans les deux directions, soit un débit entrant ou un débit sortant de la conduite. Ces deux cas sont traités dans cette section.

À noter que les équations qui seront développées sont généralement valables pour tous les dispositifs qui engendrent une restriction à la frontière de la conduite. La seule distinction qui peut être apportée est de faire varier le coefficient de décharge en fonction de la nature du dispositif.

Débit sortant. Lorsque le fluide se déverse vers l'extérieur, l'écoulement à travers l'orifice est considéré comme isentropique. L'écoulement peut alors être subsonique ou sonique au col de l'orifice. Lorsque l'écoulement est subsonique au col, alors la pression statique au col égale la pression à l'extérieur et la solution est donnée par

$$\lambda_{out} = 2c_s \left(\frac{c}{c_t} \right) \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - \lambda_{in} \quad (3.46)$$

où p_e correspond à la pression extérieure et le rapport (c/c_t) est obtenue en solutionnant l'équation non-linéaire suivante

$$\left[\left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{4}{\gamma-1}} - \phi^2 \right] \left[\frac{c}{c_t} - \frac{\lambda_{in}}{c_s (p_e/p_{ref})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \right]^2 - \frac{\gamma-1}{2} \phi^2 \left[\left(\frac{c}{c_t} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (3.47)$$

Par ailleurs, lorsque la vitesse du gaz atteint la vitesse du son au col de l'orifice, la pression statique au col n'est plus nécessairement égale à la pression extérieure. Pour ce cas, la solution est donnée par

$$\lambda_{out} = \left[\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)} \right] \lambda_{in} \quad (3.48)$$

où

$$\frac{u}{c} = \phi \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{\frac{-2}{\gamma-1}} \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{-1} \quad (3.49)$$

et le rapport $(c/c_t)_{cr}$ est calculé à l'aide de l'équation non-linéaire ci-dessous

$$\left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{\frac{4}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right\} + \phi^2 = 0 \quad (3.50)$$

Ce modèle correspond à une simplification de l'écoulement réel puisqu'aucune perte de charge n'est considérée à travers la contraction. La figure 3.13 illustre l'évolution des propriétés à la frontière sur un diagramme vitesse du son - entropie. Le diagramme de flux illustré à la figure B.2 (voir Annexe B) résume les étapes requises afin de résoudre cette frontière.

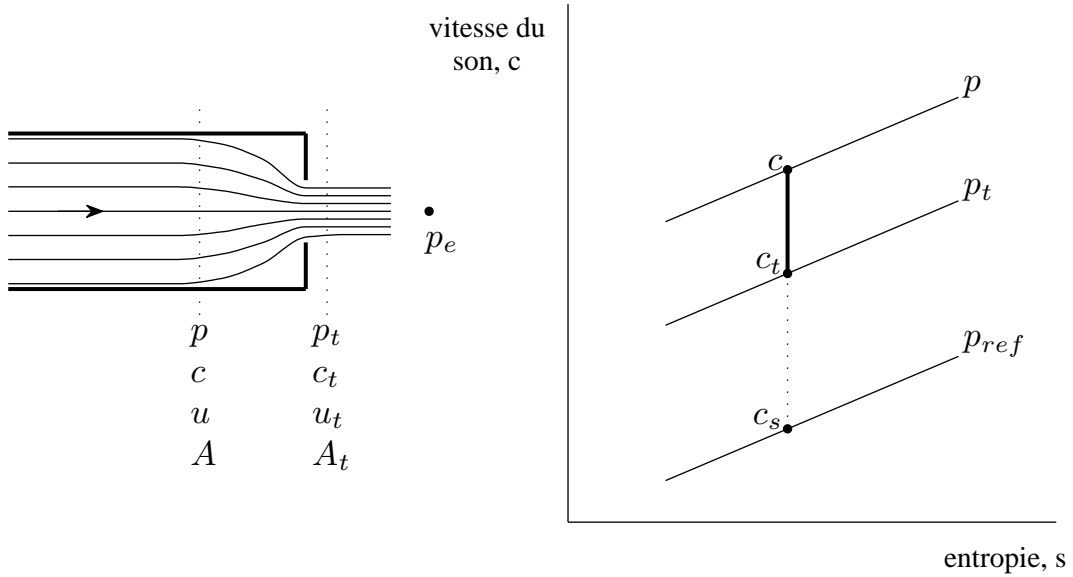


Figure 3.13 Modélisation d'une extrémité partiellement ouverte, débit sortant

Débit entrant. La condition pour un débit entrant est basée sur un modèle à pression constante, c'est-à-dire que la pression statique au col est supposée égale à la pression statique dans la conduite. Par conséquent, ceci implique qu'il n'y a aucune restauration de la pression durant le changement d'aire de section. Cette hypothèse permet de simplifier les phénomènes physiques réels. De plus, ce modèle suppose que le fluide se dilate selon un processus isentropique des conditions extérieures, p_0 et c_0 , jusqu'aux conditions au col de l'orifice, notées p_t , c_t et u_t . La figure 3.14 illustre les diagrammes vitesse du son - entropie lorsque (a) l'écoulement est subsonique et lorsque (b) l'écoulement est sonique.

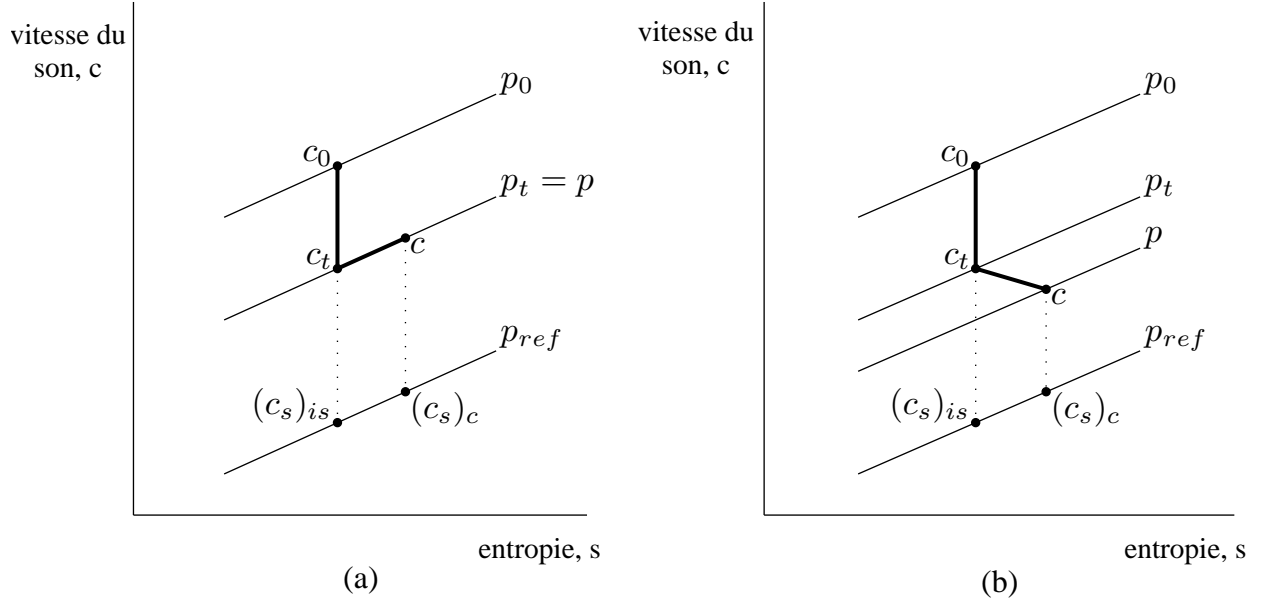


Figure 3.14 Modélisation d'une extrémité partiellement ouverte, débit entrant - (a) écoulement subsonique, (b) écoulement sonique

La solution pour cette frontière est donnée par l'équation

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \right) \lambda_{in_c} + \frac{2}{\gamma+1} \sqrt{(\gamma^2-1) c_0^2 + 2(1-\gamma) \lambda_{in_c}^2} \quad (3.51)$$

Le niveau d'entropie à la frontière correspond à

$$c_{s_c} = \left(\frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \right) \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (3.52)$$

où p correspond à la pression dans la conduite. La valeur de cette pression dépendra de la nature de l'écoulement au col de l'orifice. Si l'écoulement est subsonique, alors la pression dans la conduite correspond à

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{2C} \left[\phi \sqrt{\phi^2 + 4C} - \phi^2 \right] \quad (3.53)$$

où

$$C = \frac{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2 \right)^2} \quad (3.54)$$

et

$$u = \frac{\lambda_{out_c} - \lambda_{inc}}{\gamma - 1} \quad (3.55)$$

Cependant, lorsque l'écoulement est critique au col, alors la pression dans la conduite est calculée à partir de la relation

$$\frac{p}{p_0} = \phi \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2}{\left(\frac{u}{c_0} \right)} \right) \quad (3.56)$$

Finalement, si la pression dans la conduite est suffisamment basse par rapport à la pression extérieure, alors l'écoulement devient critique dans la conduite. Dans ce cas, l'écoulement est contrôlé par l'aire de la conduite et est indépendant de l'aire de l'orifice. La vitesse de l'écoulement dans la conduite est alors limitée à

$$u = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c_0 \quad (3.57)$$

Le diagramme de flux (fig. B.3) résume les étapes nécessaires afin de résoudre une extrémité partiellement ouverte avec un débit entrant.

Turbine Lorsqu'une turbine est connectée à l'extrémité de la conduite, une condition frontière doit être développée afin de tenir compte de l'effet de cette composante sur l'écoulement dans la conduite. Pour analyser la turbine dans l'écoulement instationnaire, les caractéristiques stationnaires de la turbine sont utilisées. Des facteurs empiriques peuvent alors être utilisés afin de calibrer les prédictions obtenues à partir des caractéristiques stationnaires pour correspondre aux données expérimentales. La figure 3.15 illustre les conditions nécessaires à la modélisation de la turbine. La station 1 correspond à l'entrée de la turbine tandis que les conditions à la sortie sont désignées par l'indice 2. Les aires de section A_1 et A_2 correspondent respectivement à l'aire de la conduite en amont et en aval de la turbine.

Les caractéristiques d'une turbine sont exprimées sous la forme d'une courbe de débit massique corrigé en fonction du rapport des pressions et ce, pour une vitesse de rotation donnée. Ces paramètres sont définis tels que :

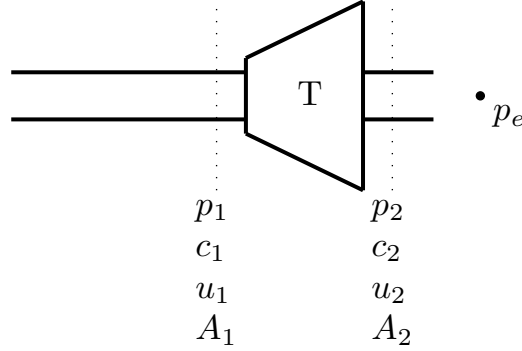


Figure 3.15 Modélisation de la turbine

le rapport de pression

$$\frac{p_{01}}{p_2}$$

le débit massique corrigé

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}$$

la vitesse du rotor corrigée

$$\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$$

où p_{01} et T_{01} correspondent respectivement à la pression et la température totale en amont de la turbine.

La figure 3.16a illustre un exemple d'une carte de performance (p_{01}/p_2 vs. $\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$). Ces caractéristiques sont obtenues expérimentalement dans des conditions stationnaires. Cette carte permet de calculer le débit massique qui passe à travers la turbine en fonction du rapport de pression.

L'implémentation de la condition frontière pour la turbine est effectuée en calculant pour chaque point sur la carte de performance (fig. 3.16a), les caractéristiques λ_{in} et λ_{out} correspondantes

$$\lambda_{in} = (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \quad (3.58)$$

$$\lambda_{out} = (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \quad (3.59)$$

où $(c_s)_1$, p_1 et M_1 correspondent respectivement au niveau d'entropie, à la pression et au nombre de Mach dans la conduite en amont de la turbine.

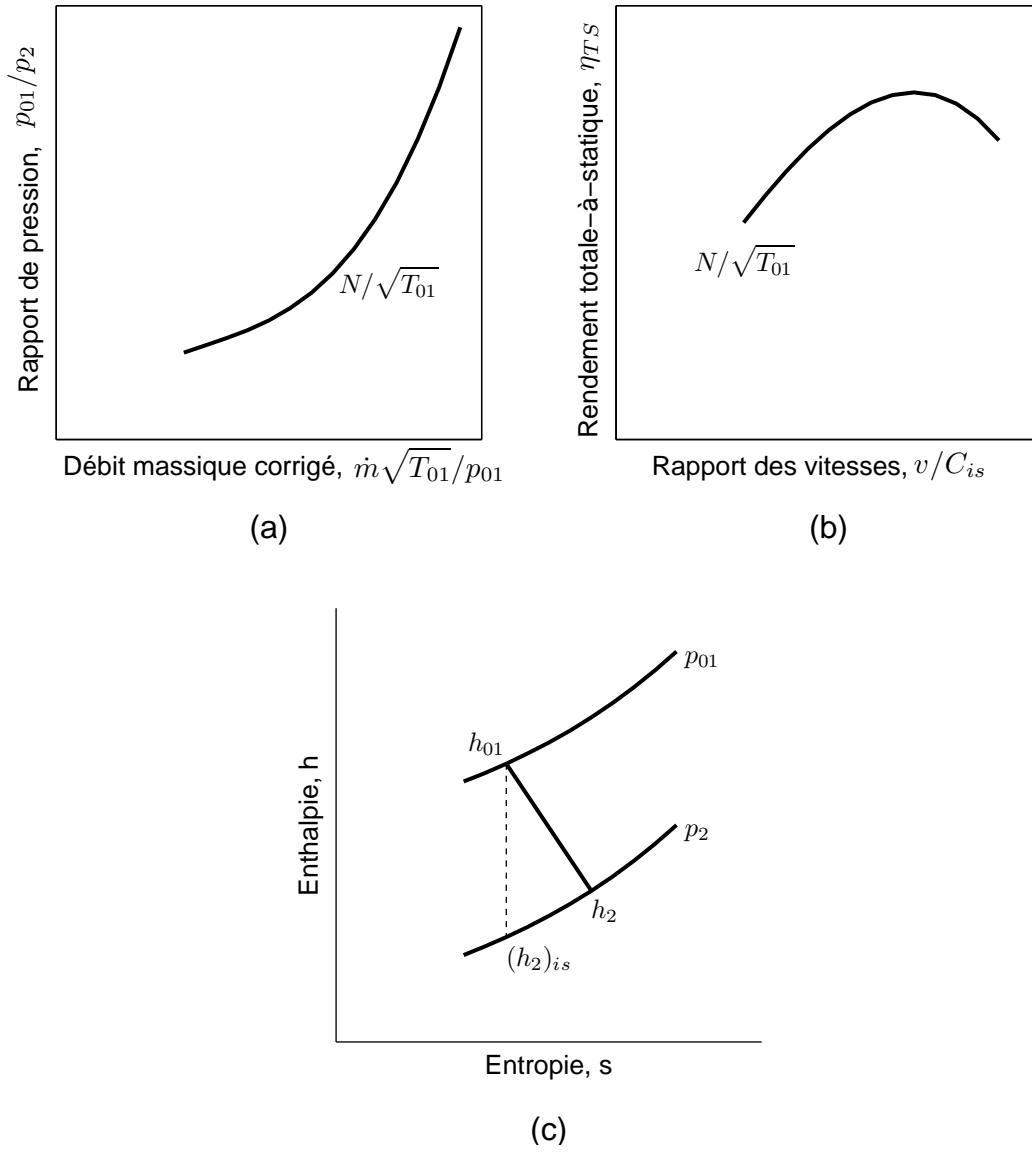


Figure 3.16 Caractéristiques d'une turbine - (a) carte de performance, (b) carte de rendement, (c) diagramme h-s

La valeur de M_1 est déterminée à partir du débit massique corrigé ($\dot{m}\sqrt{T_{01}}/P_{01}$) tel que

$$M_1 = \left(C + \frac{\gamma - 1}{2} C M_1^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (3.60)$$

où

$$C = \left\{ \sqrt{\frac{R}{\gamma}} \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}A_1} \right) \right\}^{\frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} \quad (3.61)$$

et le rapport de pression p_1/p_2 est calculé à l'aide du rapport de pression de la carte de performance (p_{01}/p_2) et du nombre de Mach (M_1)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_2} = \left(\frac{p_{01}}{p_2} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.62)$$

où p_2 est supposé constant et égal à la pression extérieure.

L'évaluation du rendement est par la suite nécessaire afin de calculer la puissance générée par la turbine. Le rendement peut être estimé à l'aide de la carte de rendement présentée à la figure 3.16b. Elle permet ainsi de calculer le rendement total-à-statique en fonction du rapport des vitesses (v/C_{is}) pour une vitesse du rotor corrigée ($N/\sqrt{T_{01}}$). Le rapport des vitesses, noté v/C_{is} , correspond au rapport entre la vitesse tangentielle au bout des pales du rotor et la vitesse isentropique du fluide. Ce paramètre est l'équivalent de l'inverse du débit massique corrigé.

$$\frac{v}{C_{is}} = \frac{(2\pi N/60) r_{tip}}{C_{is}} \quad (3.63)$$

où N correspond à la vitesse rotationnelle de la turbine en révolution par minute (rpm) et r_{tip} correspond au rayon en bout de pales du rotor.

La figure 3.16c illustre l'évolution de l'enthalpie et de l'entropie entre l'entrée et la sortie de la turbine. Le rendement total-à-statique est défini tel que

$$\eta_{TS} = \frac{h_{01} - h_2}{h_{01} - (h_2)_{is}} \quad (3.64)$$

Dans le cas où l'écoulement serait inversé dans la turbine, la frontière est analysée comme une extrémité ouverte. Cette simplification est normalement suffisante puisque la quantité d'écoulement inversée dans la turbine est généralement très faible et que la carte de turbine pour un écoulement inversé n'est généralement pas connue.

3.2.3 Implémentation du modèle

Le modèle décrit précédemment a été implémenté dans Matlab. Le choix de ce programme est basé principalement sur la facilité d'intégrer par la suite les autres composantes du groupe moteur. Comme ces autres composantes sont programmées dans Matlab et Simulink, il a été choisi d'utiliser le même langage afin de modéliser l'écoulement dans la conduite et la turbine.

De plus, toutes les simulations présentées dans ce travail ont été effectuées sur un ordinateur

de type *Intel(R) Core i7-4810MQ CPU-2.80GHz*. Les temps de calcul avec ce modèle pour les cas simulés sont donnés aux chapitres 4 et 5.

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION

Ce chapitre présente une vérification du modèle décrit à la section 3.2. Cette vérification permet d'observer dans un premier temps les erreurs induites par l'utilisation d'une méthode numérique. Elle permet aussi de s'assurer que l'implémentation du modèle a été effectuée correctement en comparant les résultats à des données publiées. Tout d'abord, une vérification est effectuée sur la méthode numérique. Par la suite, l'implémentation des conditions aux frontières est vérifiée.

Sauf indication contraire, tous les cas présentés dans ce chapitre sont effectués avec les paramètres du modèle décrit au tableau 4.1.

Tableau 4.1 Vérification du modèle - Paramètres du modèle

Paramètres	
Schéma numérique	
Méthode	Lax-Wendroff, 2 étapes
TVD	oui
CFL, ν	0.8

4.1 Vérification de la méthode numérique

La méthode numérique basée sur le schéma de Lax-Wendroff en deux étapes est vérifiée à l'aide de deux cas théoriques. La première vérification est effectuée avec le cas du tube à choc. Par la suite, les résultats numériques sont comparées à la solution exacte pour une conduite convergente-divergente.

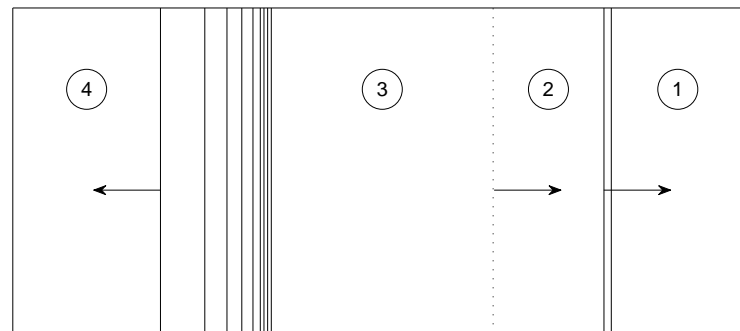
4.1.1 Cas théorique d'un tube à choc

Afin de vérifier la méthode numérique implémentée dans le modèle, la solution numérique est comparée à la solution exacte pour un tube à choc. Un tube à choc correspond à un tube fermé à ses deux extrémités dans lequel deux gaz, à des températures et pressions différentes, sont séparés initialement par un diaphragme. La figure 4.1 illustre les différentes régions dans le tube à choc au temps initial et à un instant donné suite à la rupture du diaphragme. Initialement, la région 4 et la région 1 correspondent respectivement au gaz à haute pression et à basse pression.

Lorsque le diaphragme est rompu, une onde de choc et une onde d'expansion se forment et se propagent dans le tube. L'onde de choc délimite la région 1 de la région 2. Les propriétés du gaz dans la région 1 correspondent aux conditions initiales puisque cette région n'a pas encore subi la perturbation liée au passage de l'onde de choc. La limite entre les régions 2 et 3 correspond à la frontière entre les deux gaz qui étaient initialement à des pressions et températures distinctes. Suite au passage de l'onde de choc et de l'onde d'expansion, les gaz dans les régions 2 et 3 possèdent maintenant la même pression mais sont à des températures différentes. Ces gaz sont aussi entraînés vers la droite avec la même vitesse. Finalement, les propriétés du gaz dans la région 4 correspondent aux conditions initiales du gaz à haute pression puisque l'onde d'expansion n'a pas encore atteint cette région.



(a)



(b)

Figure 4.1 Représentation des régions dans le tube à choc - (a) avant rupture du diaphragme, (b) après rupture du diaphragme

L'objectif est de calculer l'évolution des propriétés du fluide dans le tuyau à partir du moment où le diaphragme est rompu. La solution exacte, pour un cas sans friction ni transfert de chaleur, se résout analytiquement. Cette solution est comparée à celle obtenue avec le schéma de Lax-Wendroff en deux étapes. L'effet du limiteur de flux sur la solution est aussi observé.

Méthode de Lax-Wendroff en deux étapes

Dans un premier temps, la solution numérique obtenue à l'aide du schéma de Lax-Wendroff en deux étapes sans l'utilisation du limiteur de flux (LW2) est comparée à la solution exacte. Le tableau 4.2 présente les paramètres du domaine. Dans le modèle, les régions 4 et 1 sont modélisées comme un tuyau unique tel qu'illustré à la figure 4.2. Seules les propriétés au temps initial diffèrent entre les deux régions.

Tableau 4.2 Comparaison du schéma LW2 avec la solution exacte pour un tube à choc – Paramètres du domaine

Paramètres	Région [4]	Région [1]
Dimensions		
Longueur du tube (m)	0.50	0.50
Longueur des éléments (m), Δx	0.01	0.01
Diamètre du tube (m)	0.05	0.05
Nature du gaz	air	air
Multiplicateurs		
Friction, f_M	0.0	0.0
Transfert de chaleur, q_M	0.0	0.0
Conditions initiales		
Pression (bar)	5.0	1.0
Température (K)	800	300
Vitesse du gaz (m/s)	0.0	0.0

La figure 4.3 illustre la distribution de la pression, de la température et de la vitesse du gaz à travers le tube à choc 0.005 seconde après la rupture du diaphragme. Les résultats obtenus avec la solution numérique montrent de fortes oscillations près de l'onde de choc. Comme discuté précédemment (section 3.2.1), ces oscillations sont inhérentes aux techniques par différences finies d'ordre 2. Par ailleurs, mis à part ces oscillations, la solution numérique suit bien la solution exacte et évalue correctement la vitesse et la force de l'onde de choc.

Effet du limiteur de flux, TVD

La même procédure est utilisée mais cette fois-ci en appliquant la correction du limiteur de flux TVD au schéma de Lax-Wendroff en deux étapes (LW2+TVD). Les paramètres du domaine sont identiques à ceux décrits dans le tableau 4.2.

La figure 4.4 montre une nette amélioration de la solution près des discontinuités. Le limiteur de flux TVD élimine clairement les oscillations qui étaient observées précédemment et ne

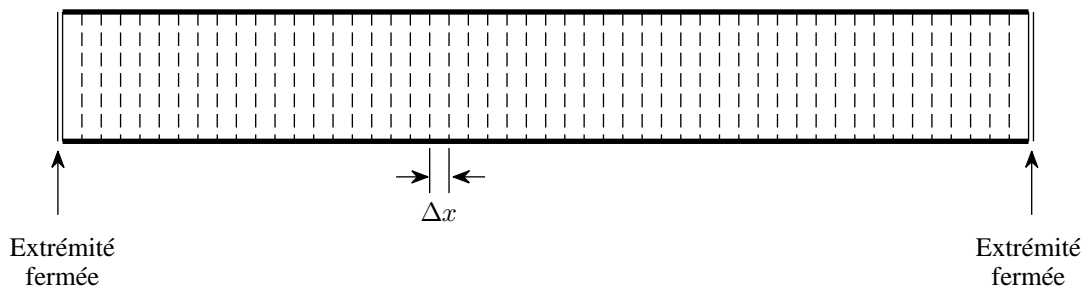


Figure 4.2 Simulation du tube à choc - Représentation du domaine

semble pas engendrer d'autres erreurs numériques.

Comme la solution exacte et la solution numérique sont obtenues en résolvant le même système d'équations, cette vérification permet d'investiguer uniquement les erreurs numériques produites par l'utilisation de la méthode numérique. Les résultats ont montré que la méthode de Lax-Wendroff en deux étapes permettait de capturer correctement les ondes de choc qui se produisent dans l'écoulement. Par contre, dues aux oscillations importantes près des discontinuités, l'utilisation de cette méthode sans limiteur de flux doit être rejetée.

La méthode de Lax-Wendroff en deux étapes jumelée à l'algorithme TVD a montré qu'elle permettait de prédire fidèlement l'écoulement instationnaire dans un tube à choc. L'unique inconvénient à l'utilisation de l'algorithme TVD c'est qu'il augmente légèrement le temps de calcul requis. Pour le cas du tube présenté dans cette section, le temps de calcul sans limiteur de flux est de 0.29 seconde par rapport à 0.39 seconde en activant l'algorithme TVD. Comme l'augmentation du temps de calcul est relativement faible par rapport à l'amélioration substantielle des résultats, la correction du limiteur de flux TVD sera toujours appliquée à la méthode de Lax-Wendroff en deux étapes lors de la validation du modèle présentée au chapitre 5.

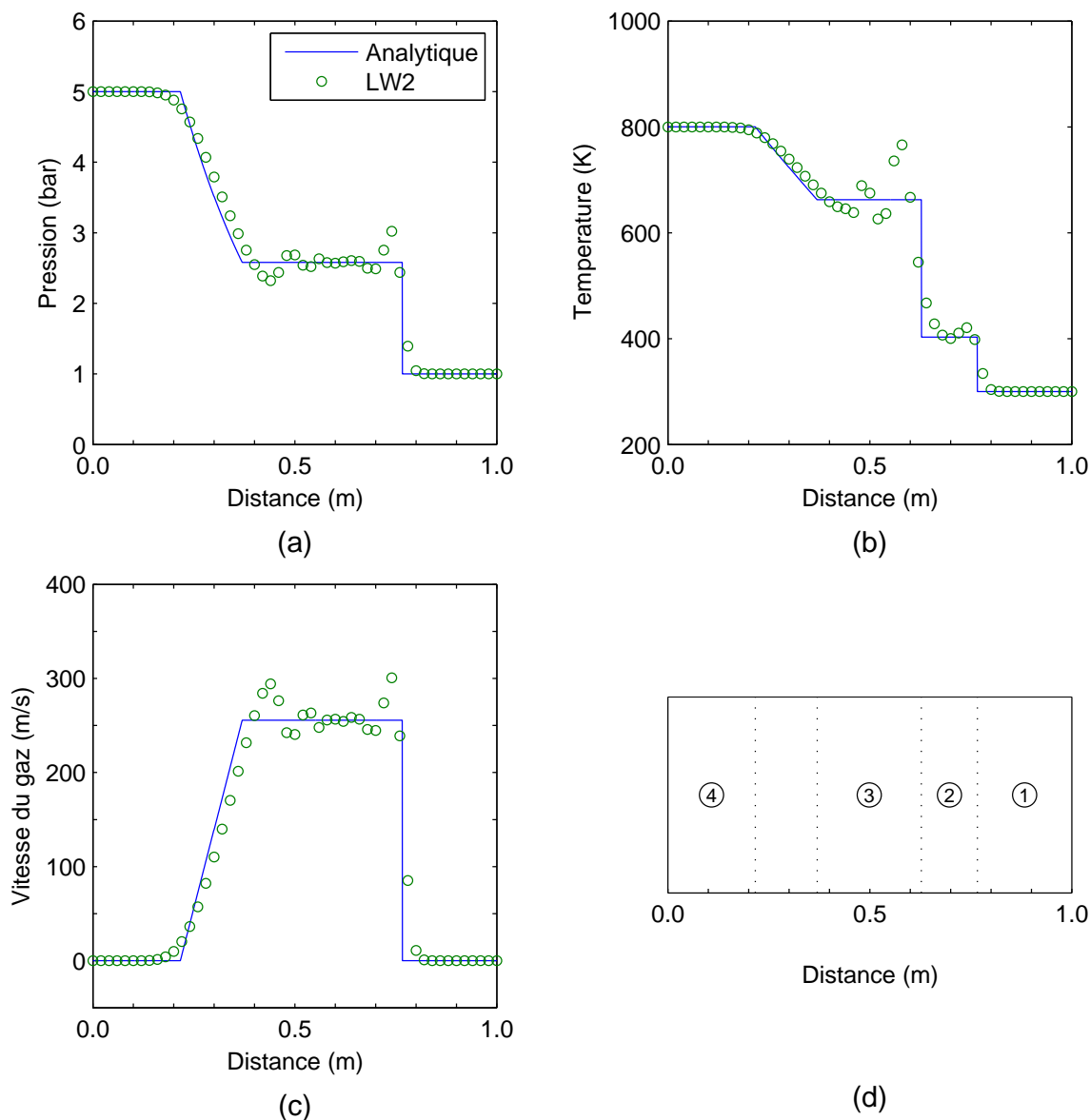


Figure 4.3 Comparaison du schéma LW2 avec la solution exacte pour un tube à choc à $t = 0.005$ s - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions

4.1.2 Cas théorique d'une conduite convergente-divergente

Afin de s'assurer que les effets causés par des changements d'aire de section dans le tuyau sont bien représentés par le modèle, la solution numérique est comparée à la solution analytique pour un écoulement stationnaire dans une tuyère convergente-divergente. Comme il a été démontré précédemment que le limiteur de flux TVD était requis afin de permettre une représentation plus juste des propriétés du fluide, seule la méthode numérique avec la

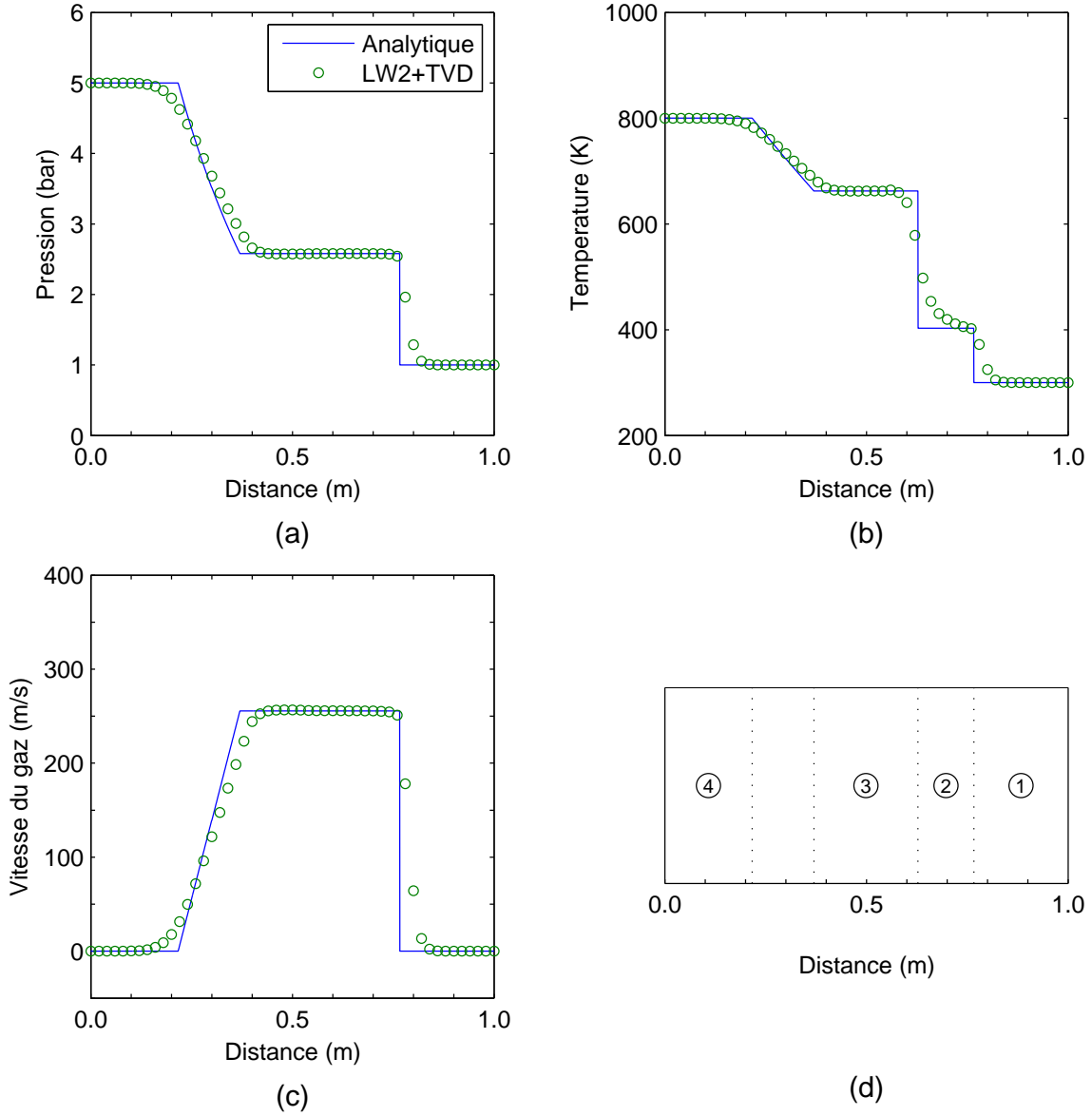


Figure 4.4 Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour un tube à choc - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions

correction TVD est comparée.

L'aire de la conduite utilisée pour cette simulation est définie par l'équation

$$A(x) = \frac{A_e - A_t}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{A_e + A_t}{2} \quad (4.1)$$

avec

$$A_e = 2, \quad A_t = 1$$

Une représentation du modèle utilisé pour simuler la conduite est illustrée à la figure 4.5. À chaque extrémité du tuyau, la frontière correspond à une extrémité ouverte.

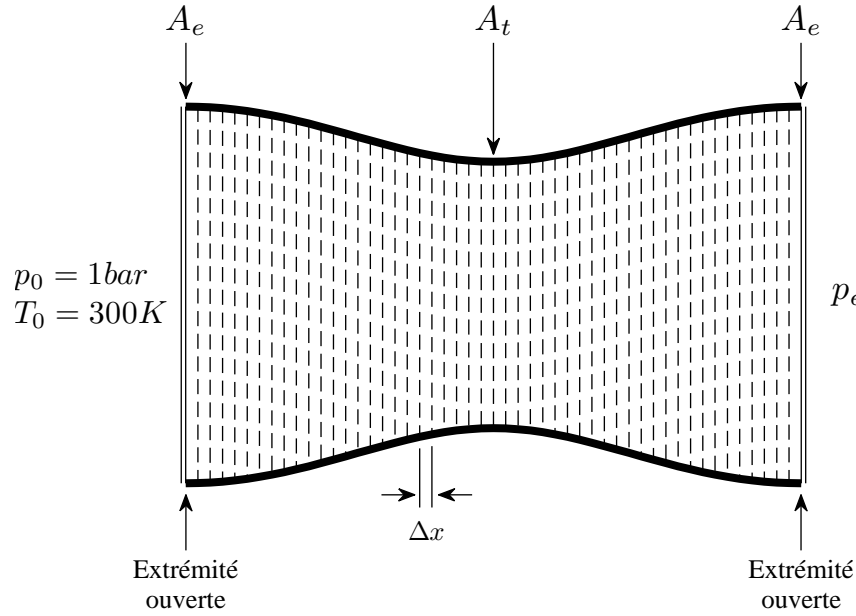


Figure 4.5 Simulation de la conduite convergente-divergente - Représentation du domaine

L'objectif est de calculer l'évolution des propriétés du fluide dans la conduite à partir de conditions initiales choisies aléatoirement. Ces conditions initiales sont définies constantes pour toutes les positions axiales du maillage au temps $t = 0$. Comme les propriétés à l'entrée et à la sortie de la conduite sont fixes dans le temps, ce problème est stationnaire. Par conséquent, la solution calculée à chaque nouveau pas de temps converge vers une solution unique qui correspond à la solution stationnaire. Le critère de convergence est défini comme l'erreur relative maximale sur les propriétés du fluide entre deux pas de temps consécutifs. La simulation se termine lorsque le critère de convergence, fixé à $1e-5$, est atteint. Le tableau 4.3 présente les paramètres du domaine utilisés pour cette simulation.

La comparaison entre la solution analytique et la solution numérique est illustrée à la figure 4.6. Trois cas sont illustrés, soit (a) un écoulement subsonique, (b) un écoulement supersonique avec un choc normal dans la zone divergente et (c) un écoulement supersonique à la sortie de la tuyère. Ces trois cas sont obtenus en variant la pression de sortie, p_e tout en conservant la même pression et température d'entrée.

Les résultats montrent que la solution numérique représente fidèlement la solution exacte pour les trois cas. Dans le cas de l'écoulement subsonique au col de la tuyère, la solution numérique permet d'estimer correctement les propriétés au col. Dans le cas (b), la position et

Tableau 4.3 Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour une conduite convergente-divergente – Paramètres du domaine

Paramètres	Tube [0]
Dimensions	
Longueur de la tuyère (m)	10.0
Longueur des éléments (m), Δx	0.2
Diamètre de la tuyère (m)	Variable
Nature du gaz	air
Multiplicateurs	
Friction, f_M	0.0
Transfert de chaleur, q_M	0.0
Conditions initiales @ t = 0	
Pression (bar)	1.0
Température (K)	300
Vitesse du gaz (m/s)	300

l'amplitude de l'onde de choc dans la section divergente sont correctement capturées par le modèle numérique. Finalement, pour le troisième cas, seul la pression à la sortie de la conduite est mal évaluée. Cette erreur est engendrée par la condition à la frontière. Comme décrit à la section 3.2.2, la condition frontière pour une extrémité ouverte, lorsque l'écoulement se déverse vers l'extérieur, impose que la pression à la frontière soit égale à la pression extérieure. Par contre, dans le cas (c), dû à la présence de chocs obliques attachés à la sortie de la conduite, la pression à la sortie de la tuyère n'est pas égale à la pression extérieure. Comme une condition supersonique à la sortie de la conduite n'est pas une condition présente dans le cas à l'étude, le modèle peut être accepté tel quel. Dans le cas où une telle condition serait possible, une modification à la condition frontière pour une extrémité ouverte serait requise. Finalement, la vérification avec une conduite convergente-divergente a permis de confirmer que le modèle permettait de simuler correctement les effets engendrés par des aires de section variables. Seules les propriétés à sortie de la conduite sont erronées lorsque l'écoulement est supersonique à cette frontière.

4.2 Vérification des conditions aux frontières

La section précédente a permis de vérifier la méthode de Lax-Wendroff en deux étapes dans le modèle. La section qui suit permet quant à elle de vérifier l'implémentation des conditions aux frontières dans le modèle.

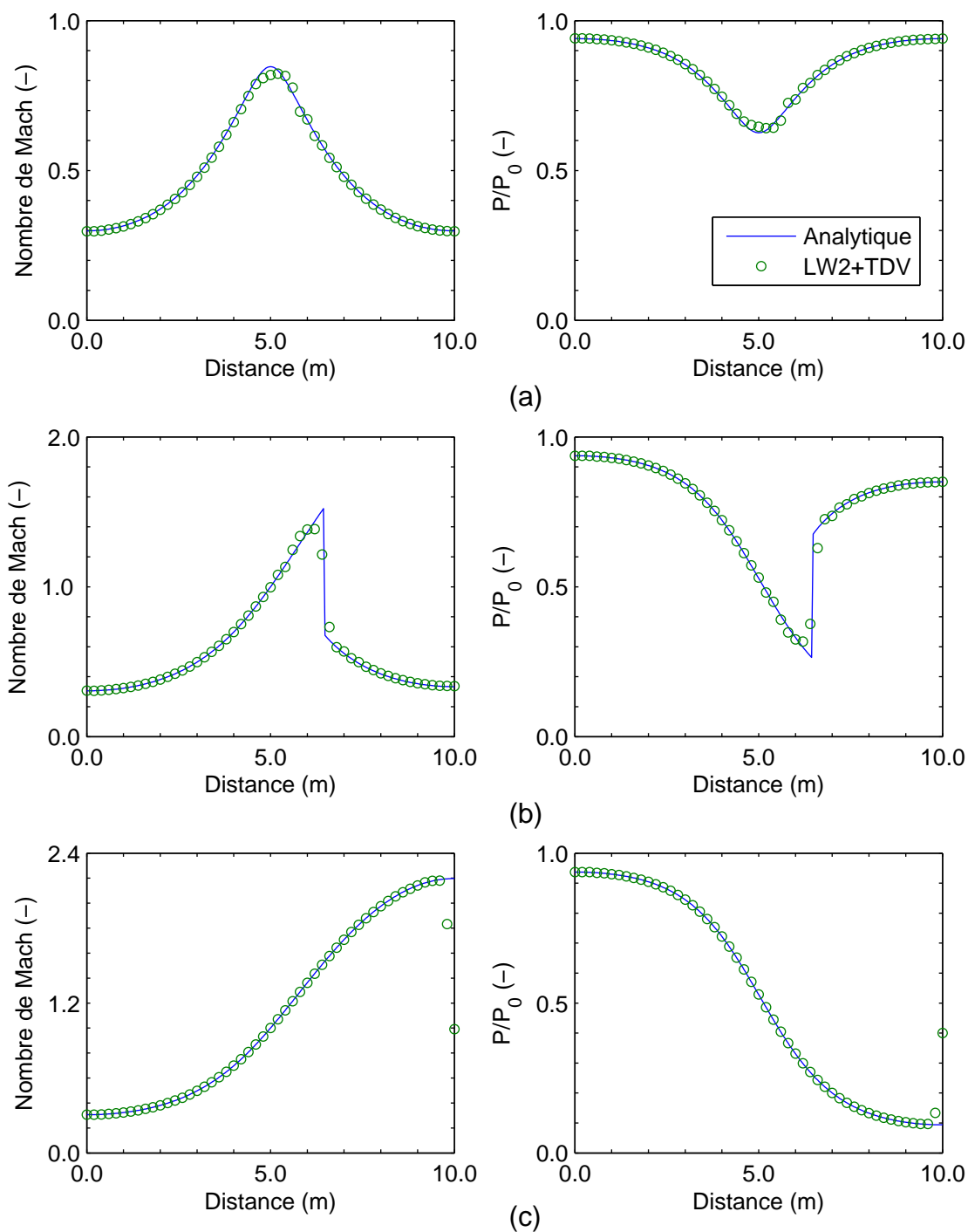


Figure 4.6 Comparaison du schéma LW2+TVD avec la solution exacte pour une conduite convergente-divergente - (a) $p_e = 0.94$ bar, (b) $p_e = 0.85$ bar, (c) $p_e = 0.40$ bar

4.2.1 Cas théorique du tube à choc

L'extrémité fermée est l'unique frontière qui peut être vérifiée à l'aide d'une solution analytique. Cette vérification est obtenue en comparant la solution exacte lorsque l'onde de choc atteint l'extrémité du tube à choc avec la solution numérique.

Lorsque l'onde de choc atteint l'extrémité du tube, elle est réfléchiée et se déplace vers la gauche. Les propriétés du gaz en aval de l'onde de choc réfléchiée correspondent à celle de la région 5 telles qu'illustrées sur la figure 4.7.

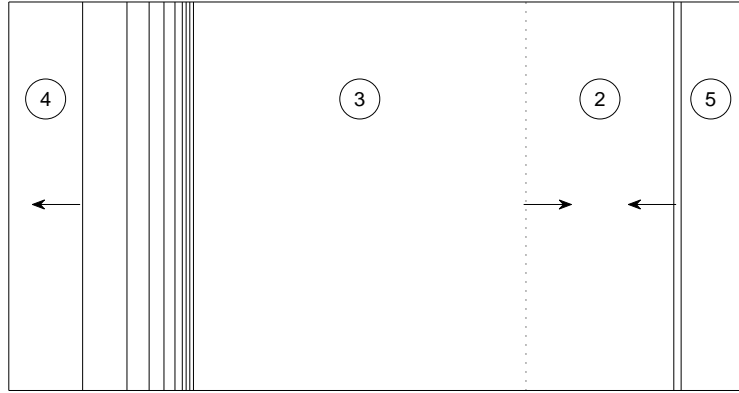


Figure 4.7 Représentation des régions dans le tube à choc, après réflexion de l'onde de choc

Les mêmes conditions initiales que celles présentées à la section 4.1.1 sont utilisées. Seule la position du diaphragme au temps initial a été modifiée pour que l'onde de choc atteigne l'extrémité du tube avant l'onde d'expansion. Le tableau 4.4 résume les paramètres du domaine utilisée pour cette simulation.

Tableau 4.4 Comparaison de la solution numérique avec la solution exacte pour une extrémité fermée – Paramètres du domaine

Paramètres	Région [L]	Région [R]
Dimensions		
Longueur du tube (m)	0.60	0.40
Longueur des éléments (m), Δx	0.01	0.01
Diamètre du tube (m)	0.05	0.05
Nature du gaz	air	air
Multiplicateurs		
Friction, f_M	0.0	0.0
Transfert de chaleur, q_M	0.0	0.0

Les profils de pression, de température et de vitesse sont comparés à 0.0095 seconde suite à la rupture du diaphragme. À cet instant, l'onde choc a été réfléchiée et se dirige vers la gauche mais n'a pas encore atteint la région 3. La figure 4.8 montre que la simulation prédit correctement l'amplitude et la position de l'onde de choc réfléchiée. Cette vérification permet de valider le modèle pour une extrémité fermée mais elle permet avant tout de vérifier l'implémentation de la méthode des caractéristiques dans le modèle pour le calcul des conditions aux frontières.

4.2.2 Données publiées

Grâce aux résultats publiés par Costall (2007) pour différentes conditions aux frontières, il est possible de vérifier l'implémentation de ces frontières en comparant les résultats du modèle avec ceux publiés. Dans cette publication, les résultats obtenus avec le modèle, nommé *ONDAS*, sont vérifiés à l'aide des résultats obtenus avec un logiciel commercial, *Ricardo WAVE*. Comme les conditions aux frontières implémentées dans le modèle *ONDAS* sont aussi basées sur les travaux de Benson (1982), les résultats obtenus devraient être identiques.

Les figures 4.9, 4.10 et 4.11 illustrent respectivement les résultats pour une extrémité fermée, une extrémité ouverte et une extrémité avec un orifice ayant un rapport des aires de 0.5. Ces résultats sont obtenus avec les paramètres du tube à choc présentés au tableau 4.5.

La comparaison des résultats permet de constater que les résultats coïncident avec ceux publiés par Costall (2007).

Cette section a permis de vérifier l'implémentation des conditions aux frontières pour une extrémité fermée à l'aide du cas théorique du tube à choc et de données publiées. De façon similaire, les conditions pour un débit sortant de la conduite pour une extrémité ouverte et une extrémité avec un orifice ont été vérifiées à l'aide de données publiées. Ainsi, seules les conditions aux frontières avec un débit entrant non pu être vérifiées, de même que la condition frontière avec une turbine.

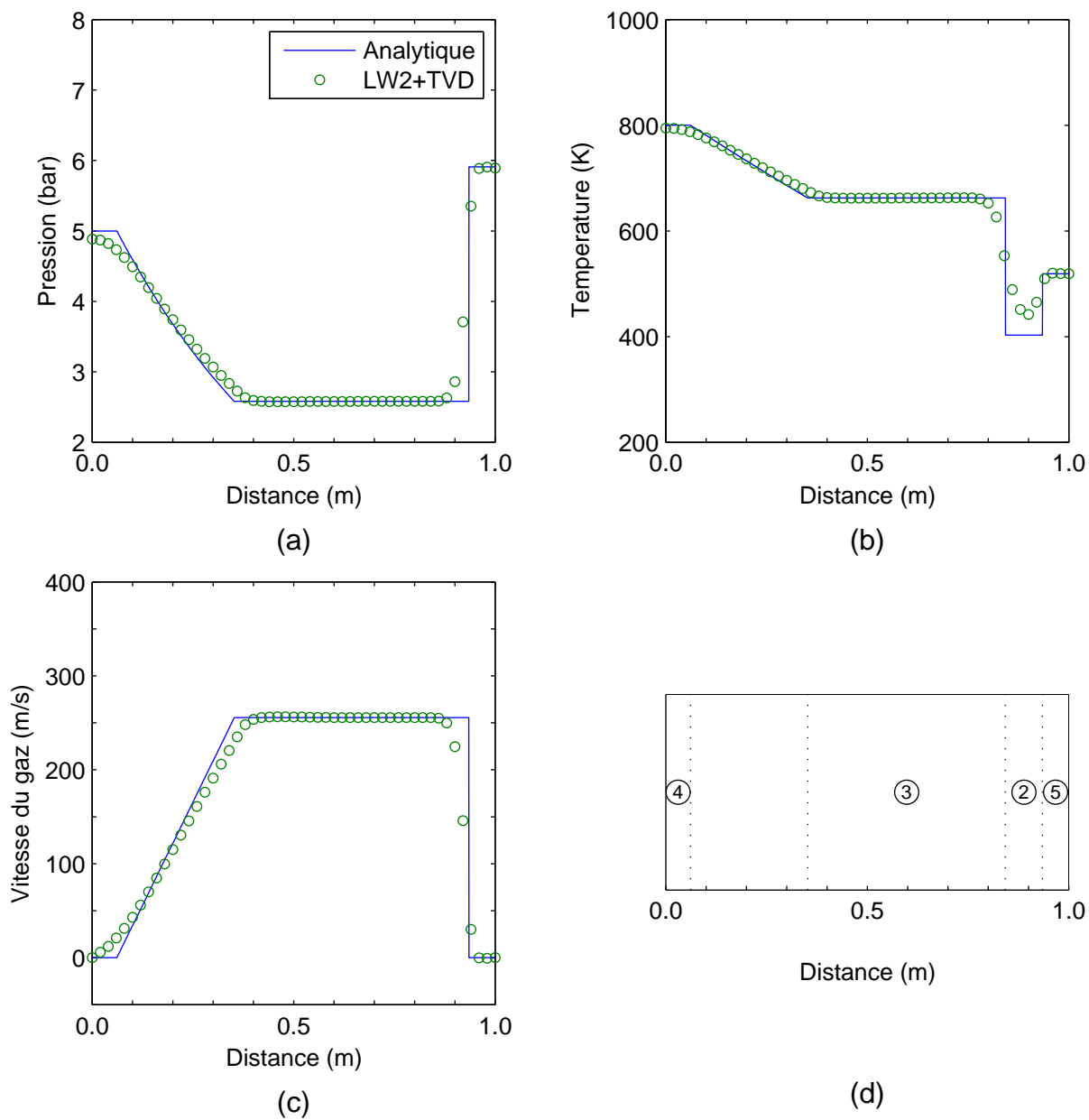
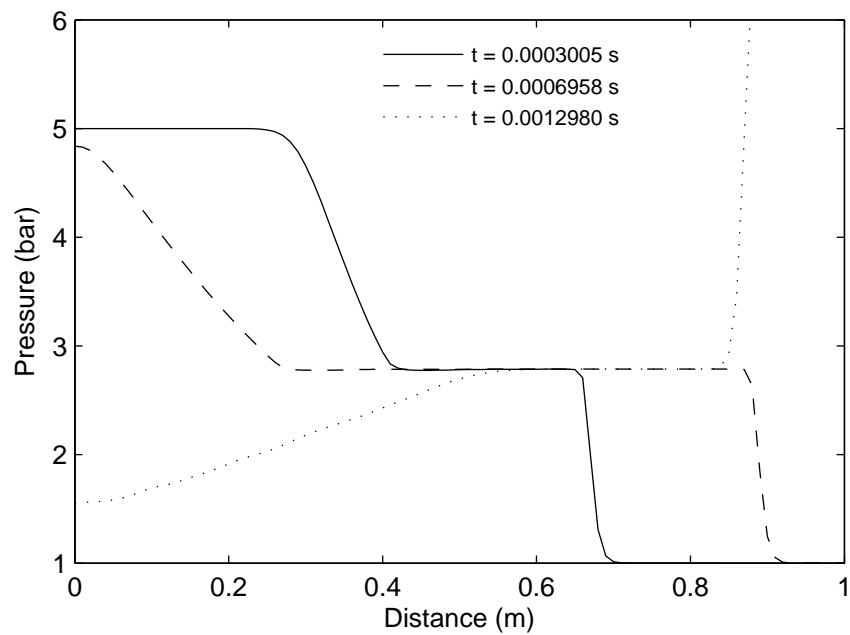


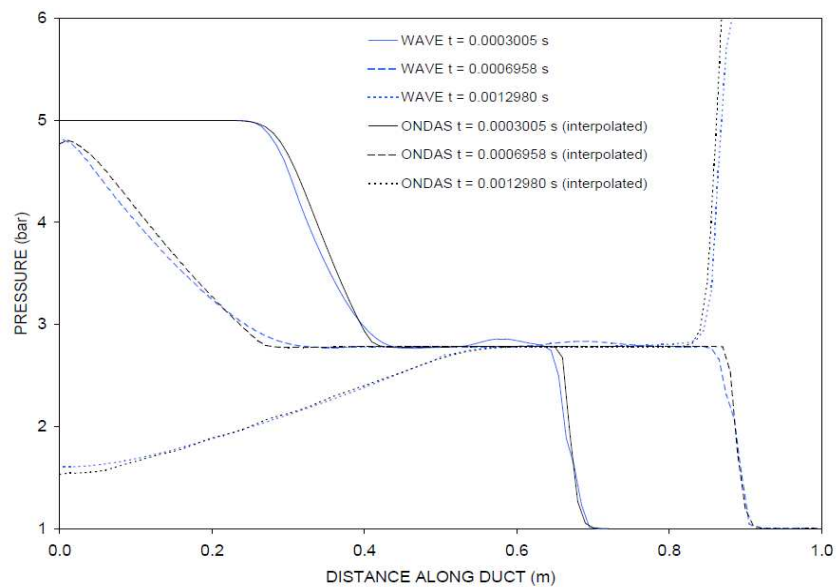
Figure 4.8 Comparaison de la solution numérique avec la solution exacte pour une extrémité fermée à $t = 0.0095$ s - (a) pression, (b) température, (c) vitesse du gaz, (d) position des régions

Tableau 4.5 Comparaison des conditions aux frontières avec des données publiées – Paramètres du domaine

Paramètres	Région [4]	Région [1]
Dimensions		
Longueur du tube (m)	0.50	0.50
Longueur des éléments (m), Δx	0.01	0.01
Diamètre du tube (m)	0.05	0.05
Nature du gaz	air	air
Multiplicateurs		
Friction, f_M	0.0	0.0
Transfert de chaleur, q_M	0.0	0.0
Conditions initiales		
Pression (bar)	5.0	1.0
Température (K)	1200	300
Vitesse du gaz (m/s)	0.0	0.0
Conditions aux frontières		
Extrémité gauche	Fermée	-
Extrémité droite	-	Variable

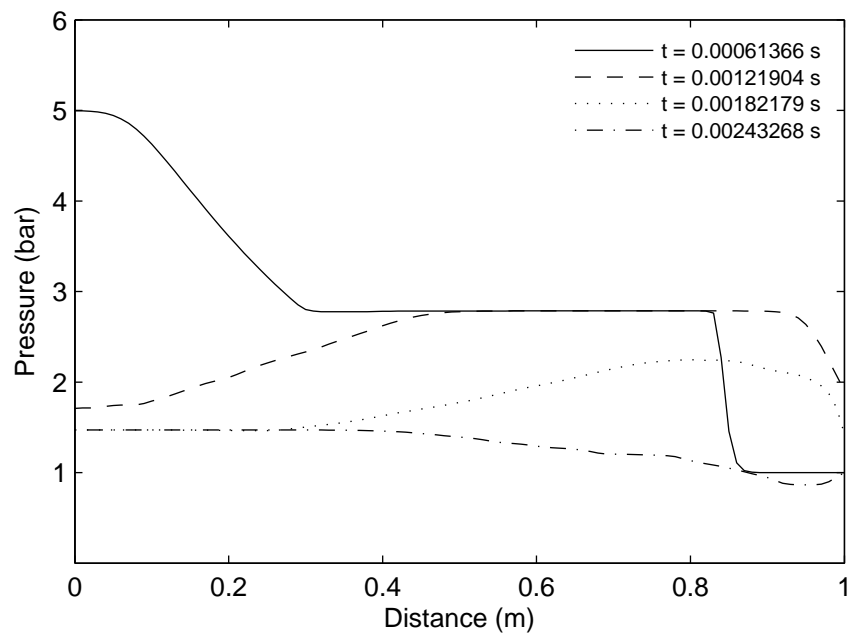


(a)

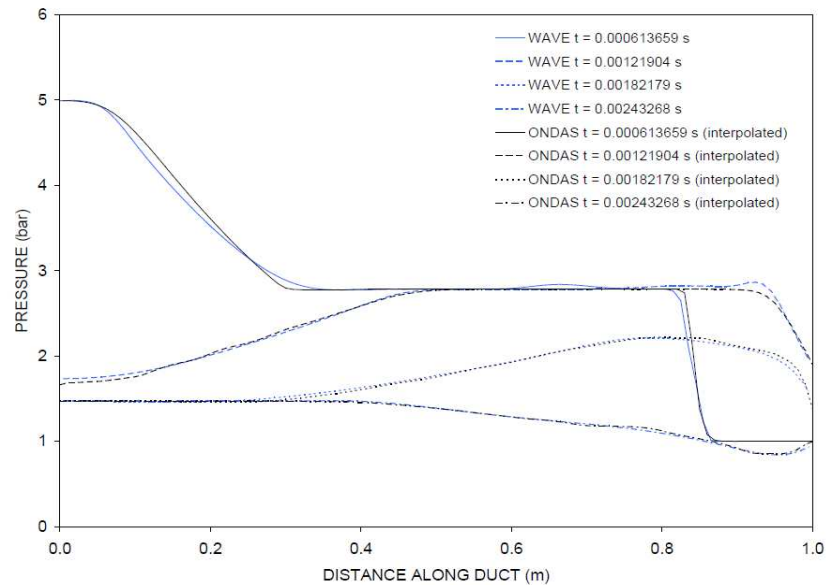


(b)

Figure 4.9 Comparaison des résultats pour une extrémité droite fermée ($\phi = 0$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.2)

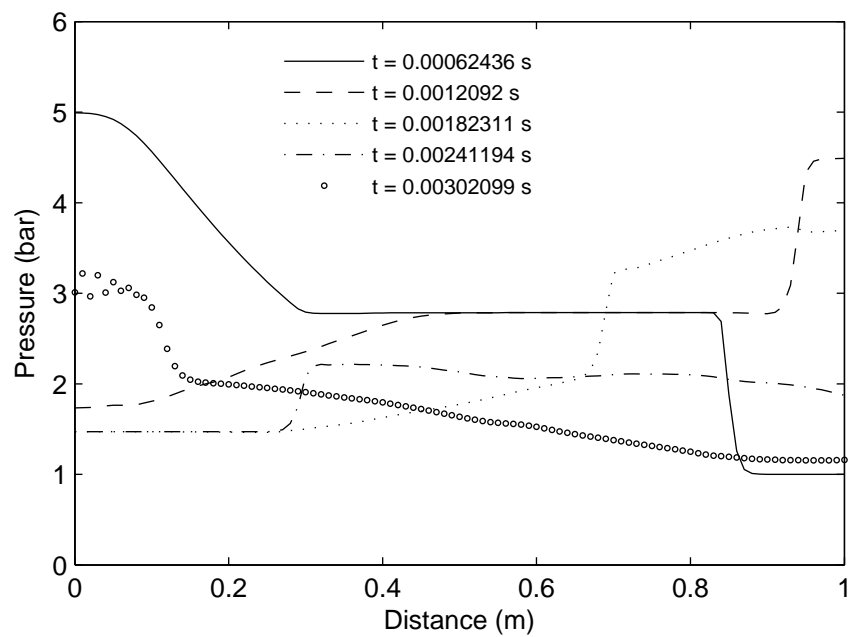


(a)

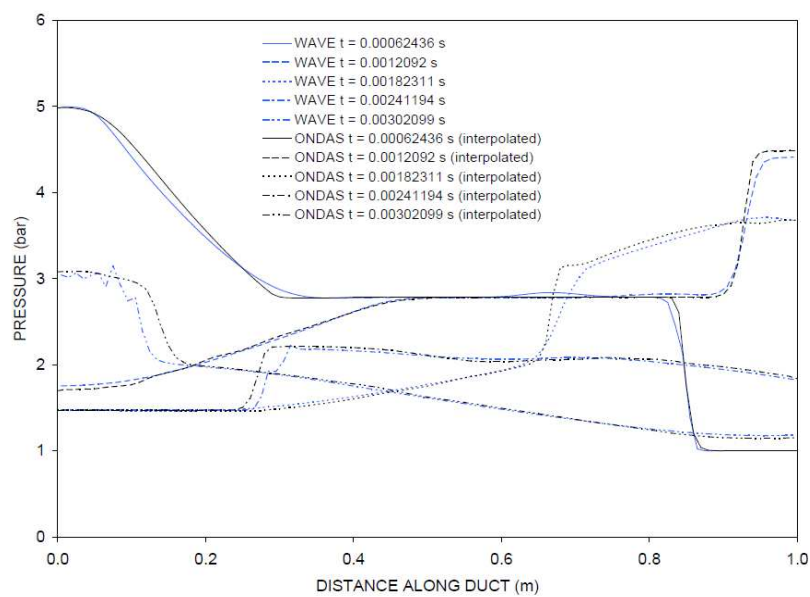


(b)

Figure 4.10 Comparaison des résultats pour une extrémité droite ouverte ($\phi = 1$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.4)



(a)



(b)

Figure 4.11 Comparaison des résultats pour une extrémité droite avec un orifice ($\phi = 0.5$) avec les données publiées - (a) résultats du modèle, (b) données publiées dans Costall (2007, fig. 3.7)

CHAPITRE 5 CALAGE ET VALIDATION DU MODÈLE SUR BANC D’ESSAI

Le développement du modèle numérique ainsi que sa vérification à l’aide de cas analytiques ont été exposés dans les chapitres précédents. L’objectif de ce chapitre est maintenant de valider le modèle numérique à l’aide de données expérimentales. Pour ce faire, la procédure de test et les paramètres de modélisation de chacun des montages expérimentaux sont décrits dans un premier temps. Par la suite, le calage du modèle est effectué à l’aide des valeurs mesurées. Finalement, les résultats numériques pour les différents cas testés sont comparés aux valeurs mesurées.

5.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite

Cette première série de tests est effectuée sans turbine afin de valider uniquement la modélisation de la conduite. Comme décrit à la section 3.1.1, ces tests sont effectués à l’aide d’une conduite munie de deux plaques à orifice.

5.1.1 Procédure de test

Plusieurs conditions sont testées afin de s’assurer que le modèle permet de simuler correctement différents cas. Les deux paramètres qui sont variés au cours des essais est l’aire géométrique au col de la première plaque à orifice ($\phi_{1_{geo}}$) et la fréquence d’ouverture du dispositif à la sortie de la composante moteur (f). Par ailleurs, tous les essais sont effectués avec la même plaque à orifice à la sortie de la conduite ($\phi_{2_{geo}}$). Le tableau 5.1 résume les conditions testées.

5.1.2 Modélisation du montage expérimental

Cette section présente les détails du modèle numérique utilisé afin de simuler l’écoulement dans le montage expérimental. La figure 5.1 illustre la modélisation de la conduite.

La conduite est modélisée comme deux conduites qui partagent une frontière avec un orifice. La plaque à orifice au centre de la conduite est modélisée à l’aide du modèle quasi-stationnaire pour une extrémité partiellement ouverte présenté à la section 3.2.2.

La géométrie de la conduite modélisée reflète la géométrie de la conduite utilisée dans le montage expérimental (voir fig. 3.1) à l’exception du changement de 90 degrés dans la conduite.

Tableau 5.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Conditions testées

Ratio des aires (géométrique), $\phi_{1_{geo}}$	Ratio des aires (géométrique), $\phi_{2_{geo}}$	Fréquence des cycles f
0.71	0.54	$100\%f_{max}$
0.76	0.54	$100\%f_{max}$
0.80	0.54	$100\%f_{max}$
0.80	0.54	$67\%f_{max}$
0.80	0.54	$83\%f_{max}$

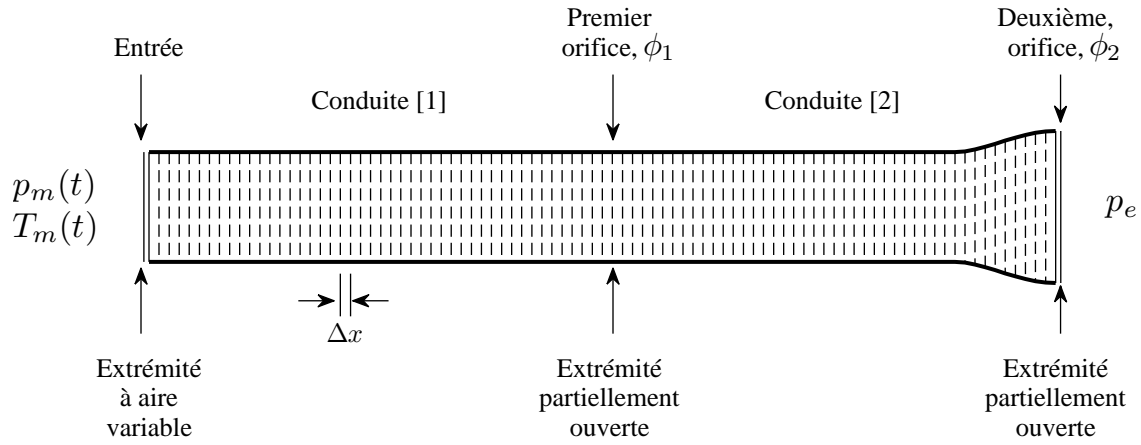


Figure 5.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Représentation du domaine

Les effets induits par ce changement de direction sont négligés dans le modèle puisque le changement de direction s'effectue sur un rayon de courbure relativement élevé, ce qui réduit les pertes de pression locale.

Le tableau 5.2 présente les paramètres du modèle utilisés pour les simulations. Comme l'écoulement est périodique, les propriétés à la fin du cycle doivent nécessairement correspondre aux propriétés au début du cycle et ce, pour toutes les positions axiales. Par conséquent, le critère de convergence est défini comme l'erreur relative maximale entre les propriétés au temps $t = 0$ et au temps $t = 1/f$ (périodicité de la solution), pour chaque position axiale.

Tableau 5.2 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Paramètres du modèle

Paramètres	
Schéma numérique	
Méthode	Lax-Wendroff, 2 étapes
TVD	oui
Simulation	
Critère de convergence	0.01
CFL, ν	0.75

5.1.3 Calage du modèle

Le calage du modèle est effectué afin d'ajuster certains paramètres du modèle pour que les résultats numériques soient plus proches des valeurs mesurées. Le calage est effectué avec une seule des conditions testées ($\phi_{1_{geo}} = 0.80$ et $f = 100\% f_{max}$). Suite au calage du modèle à l'aide de cette condition, les résultats numériques, pour toutes les conditions testées, sont comparés aux valeurs mesurées à la section 5.1.4.

Pour le calage du modèle, les quatre paramètres pouvant être ajustés sont :

- le coefficient de décharge de l'orifice 1, C_{d1}
- le coefficient de décharge de l'orifice 2, C_{d2}
- le multiplicateur de friction, f_M
- le multiplicateur du transfert de chaleur, q_M

Le multiplicateur de friction et du transfert de chaleur contrôlent respectivement l'importance des effets de friction à la paroi et de la quantité de chaleur perdue par convection. Comme tous les essais sont effectués avec le même montage expérimental, ces multiplicateurs sont estimés constants pour toutes les conditions testées. À noter que la température de la paroi (T_w), nécessaire pour le calcul de la perte de chaleur, est conservée constante et égale à 500 K pour toutes les simulations. Cette température est choisie approximativement puisque cette valeur n'est pas mesurée. Même si cette température est approximative, l'ajustement effectué avec le multiplicateur de chaleur (q_M) permet par la suite de fixer la quantité de chaleur perdue dans la conduite.

Les coefficients de décharge des plaques à orifice permettent de calculer l'aire effective de chaque plaque à orifice utilisée durant les essais. En régime stationnaire, ces coefficients dépendent du nombre de Reynolds de l'écoulement en amont de l'orifice et du rapport des diamètres qui est défini comme

$$\beta = \frac{D_t}{D} = \sqrt{\phi_{geo}}$$

où D_t est le diamètre géométrique au col de la plaque à orifice.

Les nombres de Reynolds calculés en amont des orifices sont au-dessus de 10^4 pour tous les cas simulés. Pour ces régimes, les coefficients de décharge varient peu avec le nombre de Reynolds (Crane, 1982) et peuvent donc être considérés comme constant. Par conséquent, comme la géométrie de la deuxième plaque à orifice est constante pour tous les essais, alors le coefficient de décharge, C_{d_2} , est supposé constant pour toutes les simulations.

Dans le cas de la première plaque à orifice, le rapport des diamètres des différentes plaques testées varient entre $\beta = 0.84$ et $\beta = 0.89$. Il est difficile de prédire l'effet que peut avoir cette variation de β sur le coefficient de décharge puisqu'il existe peu d'information sur les coefficients de décharge lorsque le rapport des diamètres est élevés ($\beta > 0.80$) (Crane, 1982). Par conséquent, comme première approche, il est supposé que le coefficient de décharge de la première plaque à orifice est constant indépendamment de la plaque à orifice testée.

Ainsi, lors du calage et de la validation du modèle, les quatre paramètres d'ajustement, f_M , q_M , C_{d_1} et C_{d_2} seront conservés constants pour tous les cas simulés. Afin d'ajuster ces paramètres, les valeurs prédites et mesurées sont comparées pour trois paramètres de comparaison, soient :

- la moyenne temporelle du débit massique, \dot{m}
- la moyenne temporelle de la température totale en aval de la plaque à orifice 1, $T0_{av}$
- la variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1, $p_{am}(t)$

À noter que la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m}) est calculée telle que

$$\dot{m} = \dot{m}_{coriolis} + \dot{m}_f - \dot{m}_{perte} \quad (5.1)$$

où $\dot{m}_{coriolis}$ et \dot{m}_f correspondent respectivement au débit massique d'air et de carburant mesurés dans le banc d'essai. La valeur \dot{m}_{perte} correspond à une estimation des fuites dans la composante moteur et est définie comme 2% du débit massique d'air mesuré.

Les figures 5.2 et 5.3 illustrent les résultats obtenus avant d'ajuster les paramètres, c'est-à-dire avec $C_{d_1} = 1$, $C_{d_2} = 1$, $f_M = 0$, $q_M = 0$. Les erreurs relatives sont calculées telles que

$$e_r(\dot{m}) = \frac{\dot{m}_{exp} - \dot{m}_{num}}{\dot{m}_{exp}} \quad (5.2)$$

$$e_r(T0_{av}) = \frac{T0_{avexp} - T0_{avnum}}{T0_{avexp}} \quad (5.3)$$

Ces figures montrent que l'amplitude du pic de pression est sous-estimée pour toutes les

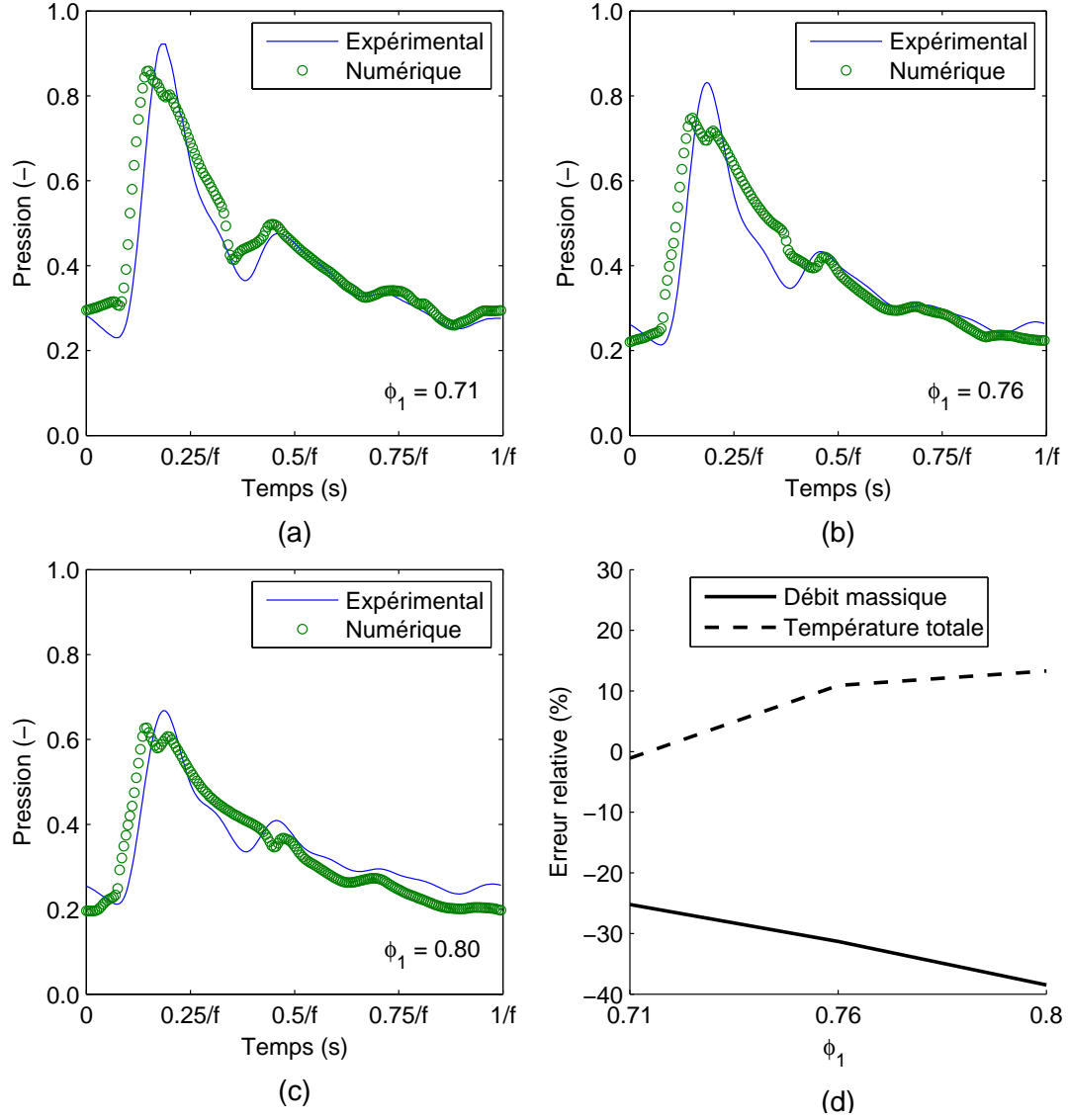


Figure 5.2 Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différents ϕ_1 avec $f = 100\%f_{max}$ et $\phi_2 = 0.54$ - (a) $\phi_1 = 0.71$, (b) $\phi_1 = 0.76$, (c) $\phi_1 = 0.80$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Avant calage du modèle

conditions. De plus, la forme du pic de pression est généralement mal capturée. De plus les erreurs relatives sur le débit massique et sur la température totale sont importantes dans tous les cas simulés. Comme les écarts entre les valeurs prédites des valeurs mesurées sont importantes, le calage du modèle est nécessaire.

Dans un premier temps, considérons l'effet des quatre paramètres d'ajustement (C_{d1} , C_{d2} , f_M et q_M) sur chacun des paramètres de comparaison. À l'aide du modèle numérique, les résultats sont obtenus en faisant varier un seul paramètre d'ajustement à la fois. L'effet de chacun de

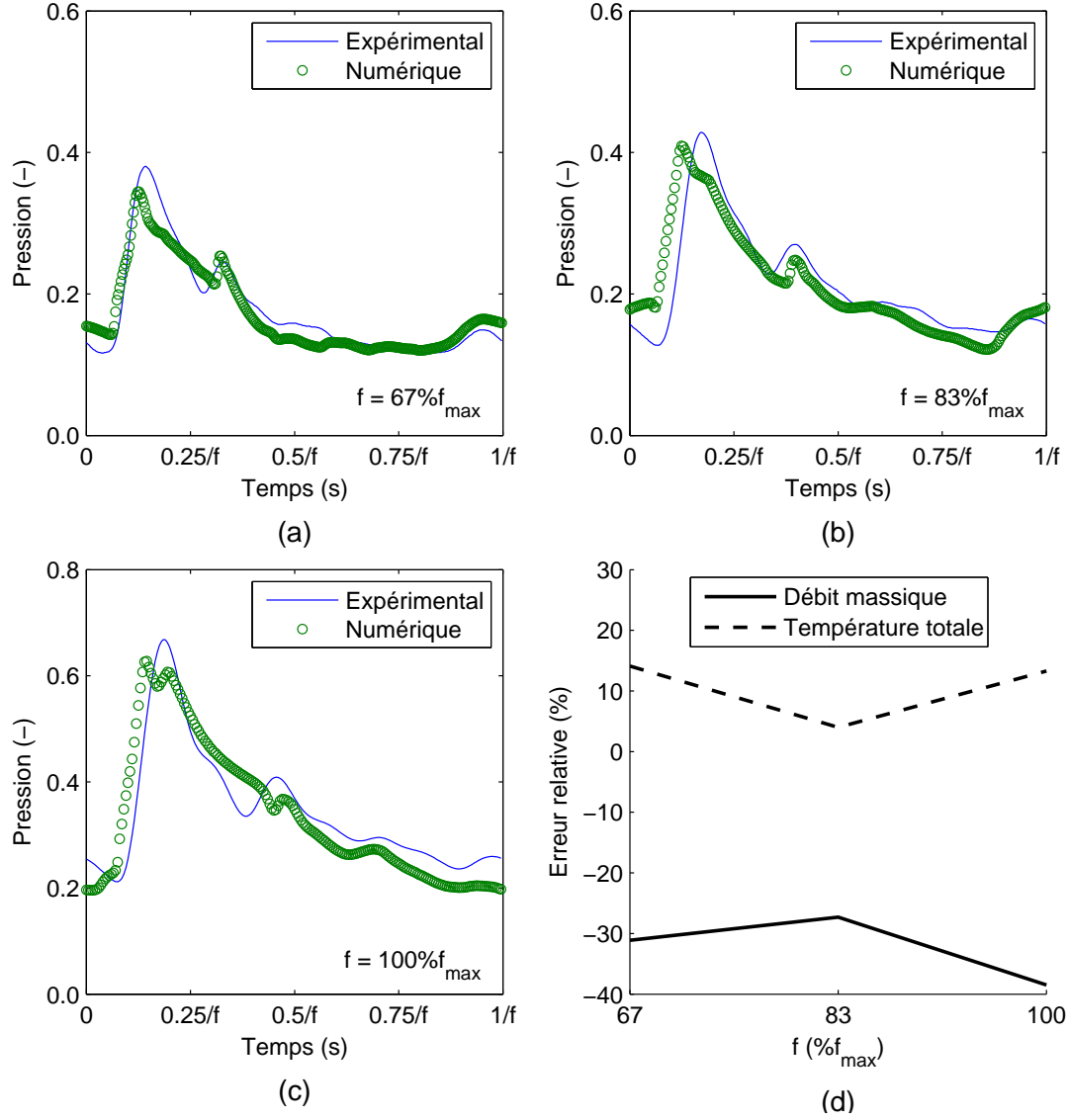


Figure 5.3 Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différentes fréquences avec $\phi_1 = 0.80$ et $\phi_2 = 0.54$ - (a) $f = 67\%f_{max}$, (b) $f = 83\%f_{max}$, (c) $f = 100\%f_{max}$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Avant calage du modèle

ces paramètres sur les paramètres de comparaison est illustré comme un pourcentage par rapport aux valeurs de référence qui sont obtenues avec $C_{d1} = 1$, $C_{d2} = 1$, $f_M = 0$, $q_M = 0$. Les coefficients de décharge (C_{d1} et C_{d2}) sont variés de 1 à 0.6 tandis que les multiplicateurs (f_M et q_M) sont variés de 0 à 2.

Moyenne temporelle du débit massique

L'effet de chaque paramètre d'ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique est illustré à la figure 5.4.

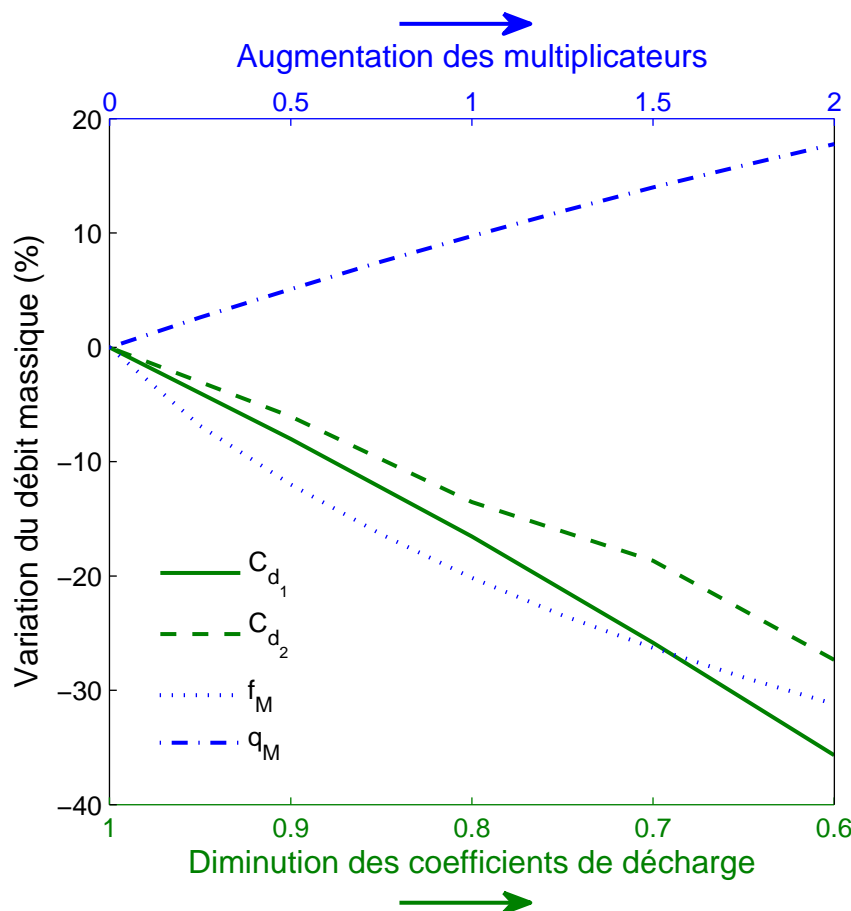


Figure 5.4 Effet des constantes d'ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m})

Ce graphique montre que la moyenne temporelle du débit massique est inversement proportionnelle aux coefficients de décharge utilisés. La diminution des coefficients de décharge augmente la restriction dans la conduite et par conséquent réduit le débit massique pouvant être évacué durant un cycle. Par ailleurs, le coefficient de décharge de la première plaque à orifice présente une influence un peu plus élevée sur le débit massique que la deuxième plaque à orifice.

Pour ce qui est des multiplicateurs, leurs effets sont contraires. L'augmentation du multiplicateur de la friction a pour effet de réduire le débit massique moyen tandis que l'augmentation du multiplicateur du transfert de chaleur augmente la quantité de débit massique évacuée

par cycle.

Moyenne temporelle de la température totale en aval de la plaque à orifice 1

Considérons maintenant l'effet des paramètres d'ajustement sur la moyenne temporelle de la température totale en aval de la première plaque à orifice. La figure 5.5 présente les résultats obtenus.

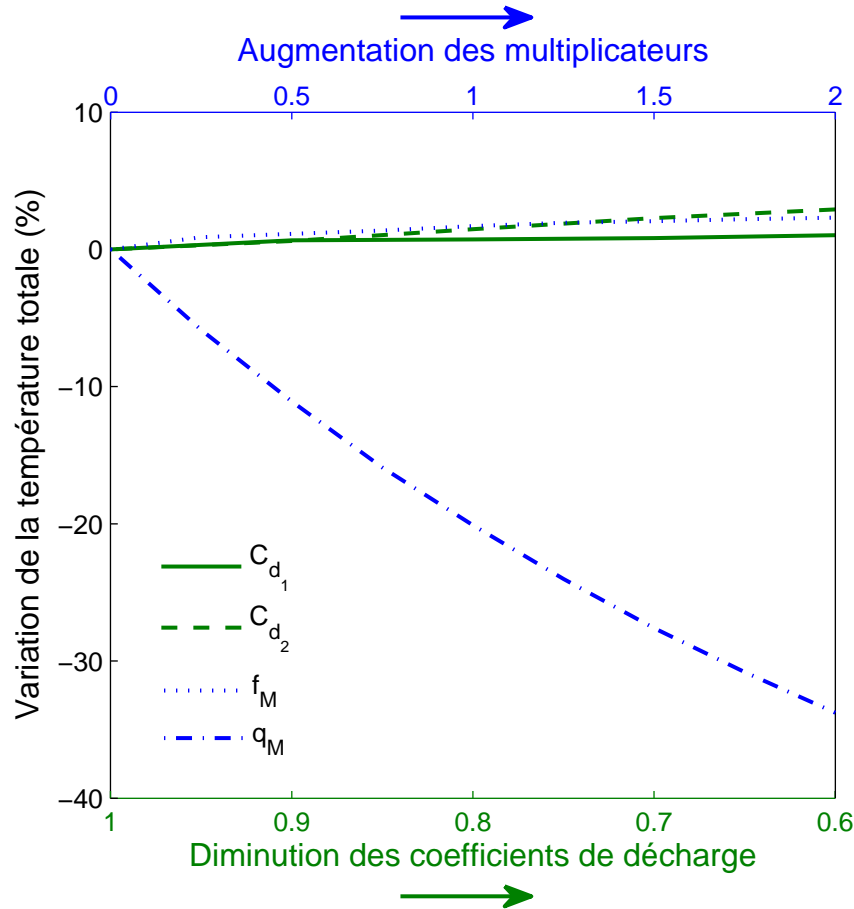


Figure 5.5 Effet des constantes d'ajustement sur la moyenne temporelle de la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$)

Ces résultats montrent que l'influence des coefficients de décharge et du multiplicateur de la friction sont négligeables. Par conséquent, seul le multiplicateur du transfert de chaleur a un effet important sur la température totale. Plus ce multiplicateur est grand, plus le transfert de chaleur à la paroi est important et par conséquent, plus la température totale du gaz est réduite.

Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1

Afin de caractériser l'effet des paramètres d'ajustement sur la variation temporelle de la pression statique en amont de la première plaque à orifice, les pressions obtenues numériquement sont comparées en faisant varier les constantes d'ajustement. Les valeurs absolues des pressions sont normalisées à l'aide d'une pression de référence, notée p_{ref} . Cependant, ceci n'affecte pas la comparaison des résultats puisque tous les résultats sont normalisés par rapport à la même valeur de référence.

La figure 5.6a montre que la diminution du coefficient de décharge C_{d1} a pour effet d'augmenter la pression sur la majorité du cycle. Ce paramètre affecte plus particulièrement l'amplitude du pic de pression principal et modifie aussi légèrement sa forme.

Par la suite, l'effet du coefficient de décharge C_{d2} est illustré à la figure 5.6b. Ce coefficient a peu d'effet sur le pic de pression principal. Par contre, il modifie nettement la position et l'amplitude du second pic de pression.

Finalement, les figures 5.6c et 5.6d montrent que les multiplicateurs q_M et f_M ont peu d'effet sur la variation temporelle de la pression statique.

À partir des résultats obtenus, il est alors possible de modifier les paramètres d'ajustement afin de rapprocher les valeurs obtenus numériquement aux valeurs mesurées. Le tableau 5.3 présente les valeurs des quatre paramètres d'ajustement obtenues suite au calage du modèle.

Tableau 5.3 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Constantes d'ajustement du modèle

Constantes d'ajustement	Valeur
Coefficient de décharge	
Orifice 1, C_{d1}	0.95
Orifice 2, C_{d2}	0.80
Multiplicateurs	
Friction, f_M	1.2
Transfert de chaleur, q_M	0.1

Il faut noter qu'il existe dans la littérature des données empiriques pour déterminer le coefficient de décharge d'une plaque à orifice dans un écoulement stationnaire (voir Crane, 1982). Dans le cas de la première plaque à orifice, le rapport des diamètres des différentes plaques testées varient entre $\beta = 0.84$ et $\beta = 0.89$. Par contre, les données empiriques sont unique-

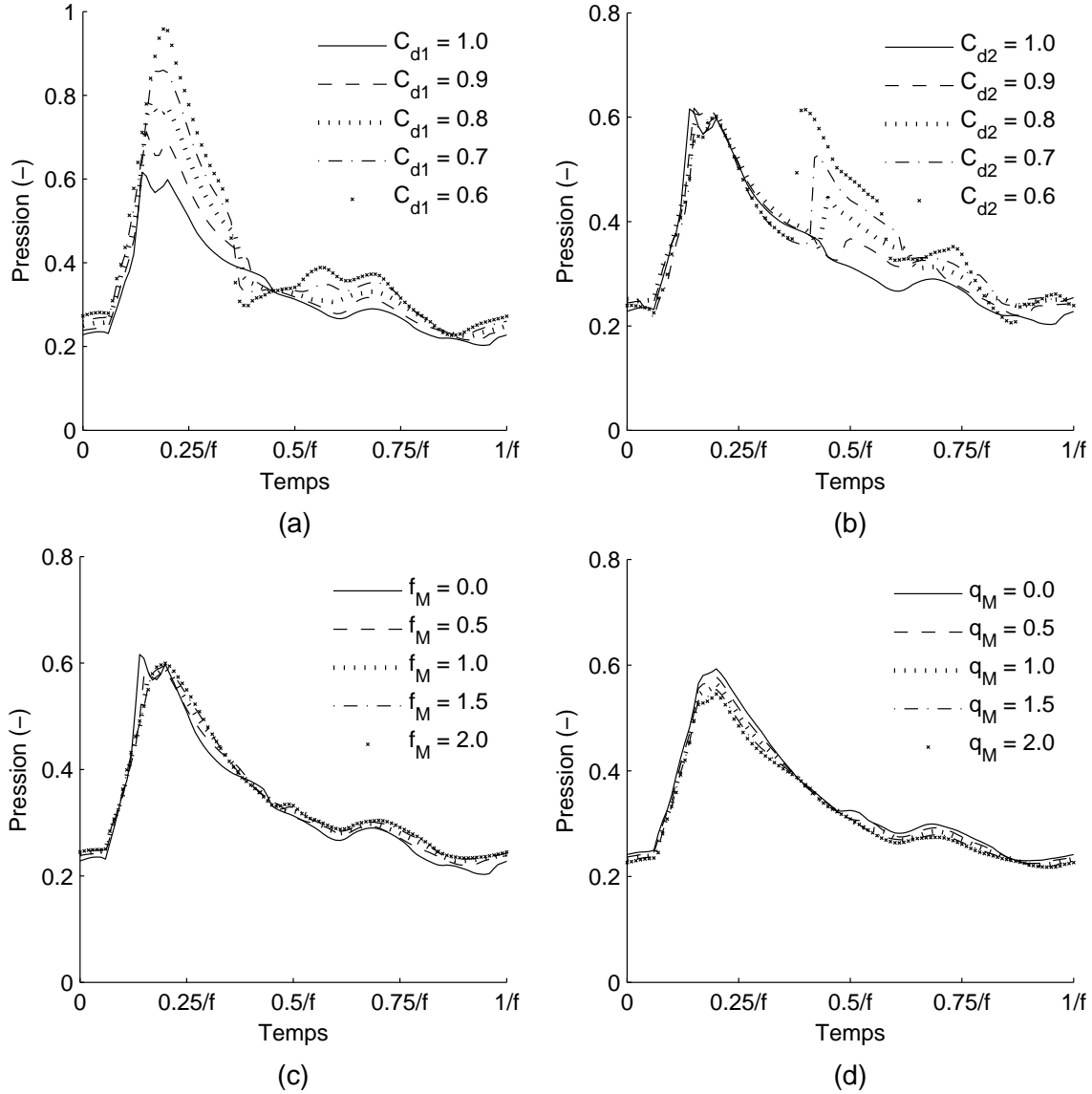


Figure 5.6 Effet des constantes d'ajustement sur la variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) - (a) Coefficient de décharge de la plaque à orifice 1, (b) Coefficient de décharge de la plaque à orifice 2, (c) Multiplicateur de friction, (d) Multiplicateur du transfert de chaleur

ment disponibles pour des valeurs de β en deçà de 0.80. Dans le cas de la deuxième plaque à orifice, le rapport des diamètres correspond à $\beta = 0.74$. Pour une telle plaque à orifice et pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^4 , la valeur du coefficient de décharge en régime permanent correspond à 0.61. Par contre, la présence, dans le montage expérimental, d'une section divergente en amont de la deuxième plaque à orifice pourrait avoir un effet sur la valeur du coefficient de décharge. Pour ces raisons, les coefficients de décharge des deux

plaques à orifice ont été déterminés à partir des résultats expérimentaux au lieu d'utiliser des données empiriques.

5.1.4 Résultats et discussion

Une fois les constantes d'ajustement fixées, le modèle est utilisé afin de simuler tous les cas testés. Cette section présente la comparaison entre les valeurs mesurées et les valeurs prédites à l'aide du modèle numérique. Cette comparaison permet donc de valider si le modèle simule correctement toutes les conditions testées.

Les figures 5.7 et 5.8 illustrent respectivement la variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice (p_{am}/p_{ref}) pour les essais avec différentes plaques à orifice et pour les essais avec différentes fréquences. Ces figures permettent de comparer les résultats calculés numériquement aux résultats expérimentaux mesurés. Parallèlement, les erreurs relatives sur les valeurs moyennes du débit massique et de la température totale mesurées sont aussi présentées sur ces figures.

En comparant tout d'abord les résultats obtenus avec les trois plaques à orifice, on constate que les profils de pression calculés avec le modèle après calage simulent assez fidèlement les profils mesurés à l'aide de l'instrumentation à haute fréquence. Ces résultats montrent aussi que le changement du col de l'orifice 1 modifie l'amplitude de l'onde de pression dans la conduite. De plus, la variation de l'erreur relative, illustrée sur la figure 5.7d, montre que l'erreur sur le débit massique et sur la température totale varient à l'intérieur de $\pm 5\%$.

Dans le cas des courbes obtenues pour différentes fréquences de cycle, les variations temporelles de la pression obtenues numériquement se comparent aussi relativement bien avec les résultats expérimentaux. Par contre, les profils dans les zones du cycle à plus basse pression sont moins bien représentés lorsque les fréquences sont plus faibles. Ces zones correspondent aussi aux intervalles de temps où le nombre de Reynolds local est plus faible. Par conséquent, une variation du coefficient de décharge en fonction du nombre de Reynolds pourrait améliorer les résultats dans ces zones.

Les erreurs relatives sur le débit massique obtenues pour différentes fréquences (fig. 5.8d) montrent que plus la fréquence du cycle d'ouverture-fermeture est réduite plus la simulation surestime le débit massique. Les résultats montrent aussi que les erreurs relatives sur la température totale sont importantes pour les cas à basse fréquence.

Les erreurs relevées entre les données expérimentales et le modèle unidimensionnel proviennent en partie des erreurs de modélisation. Les erreurs de modélisation sont engendrées par les multiples simplifications qui ont été faites afin de modéliser les phénomènes physiques

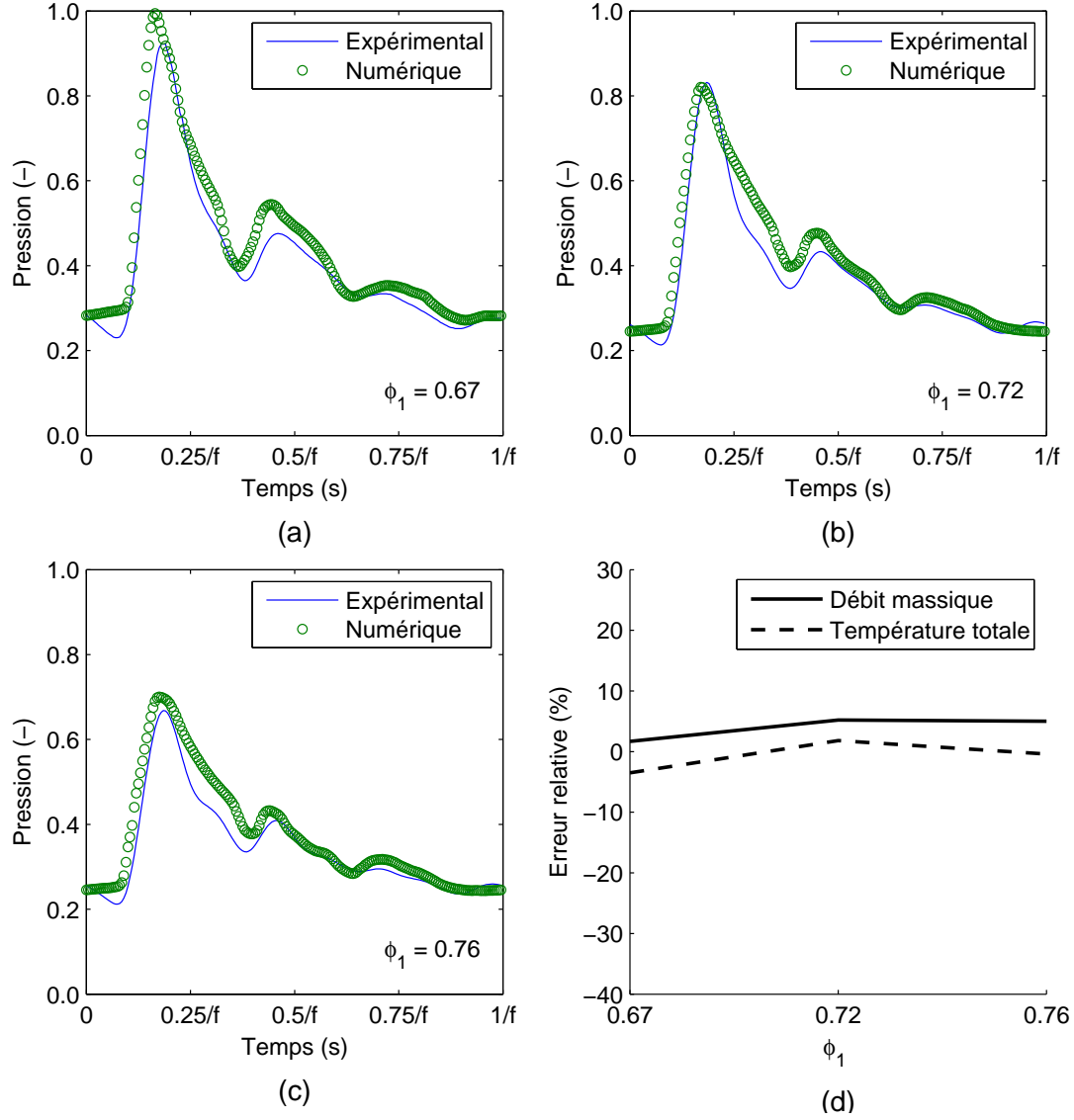


Figure 5.7 Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différents ϕ_1 avec $f = 100\%f_{max}$ et $\phi_2 = 0.43$ - (a) $\phi_1 = 0.67$, (b) $\phi_1 = 0.72$, (c) $\phi_1 = 0.76$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Après calage du modèle

complexes qui se produisent dans l'écoulement. Par exemple, l'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait affecte nécessairement la précision des résultats puisque la température du fluide atteint des valeurs très élevées ($T > 1200$ K) à certains moments. De plus, les pertes associées à la courbure dans la conduite ont été négligées dans la simulation, ce qui engendre certainement une erreur sur les valeurs prédites.

Par contre, les différences relevées peuvent aussi provenir d'erreurs dans l'estimation des caractéristiques d'entrée et de sortie de la conduite. Les principales sources d'erreur possible

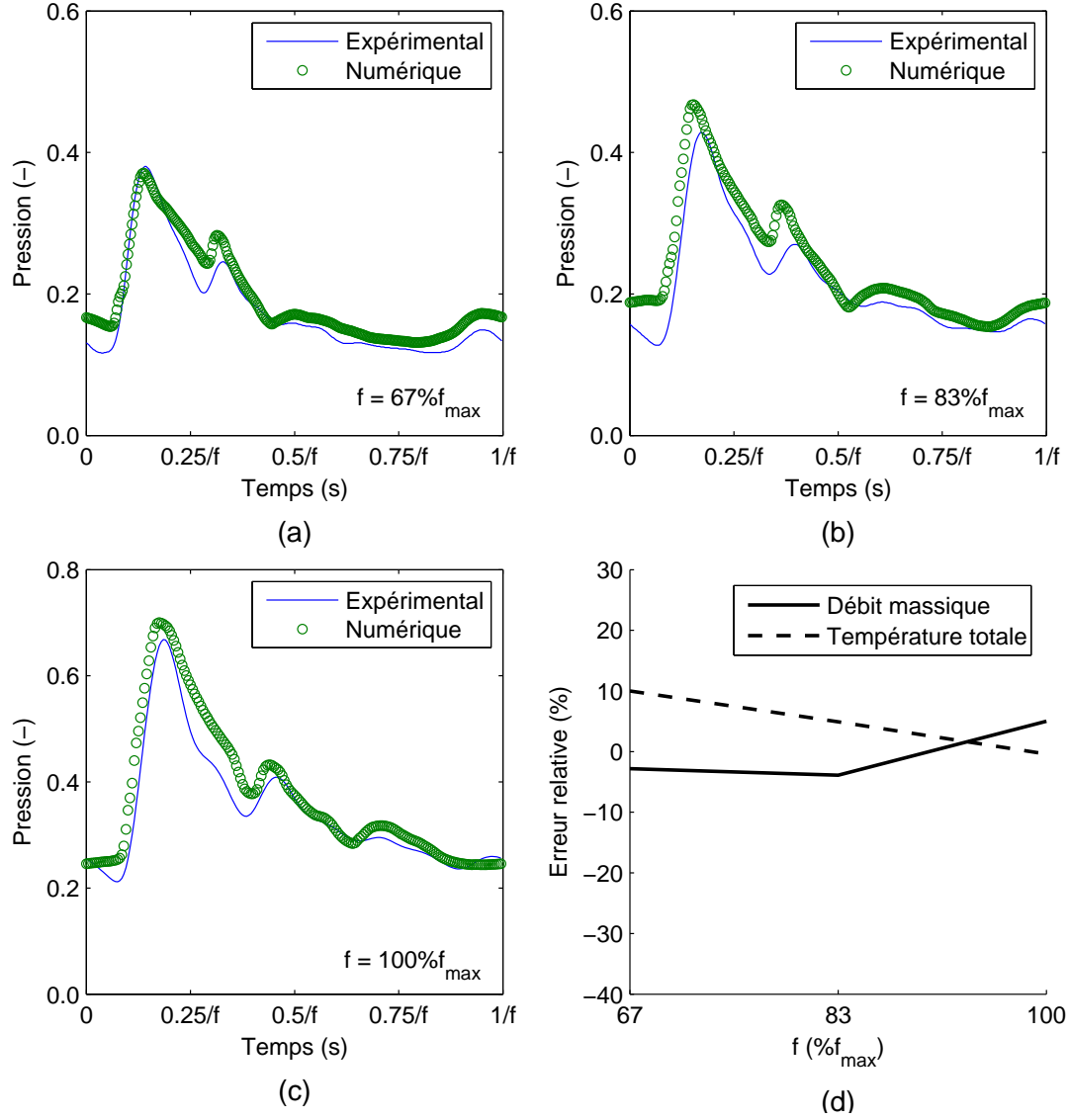


Figure 5.8 Variation temporelle de la pression statique en amont de la plaque à orifice 1 (p_{am}/p_{ref}) pour différentes fréquences avec $\phi_1 = 0.76$ et $\phi_2 = 0.43$ - (a) $f = 67\%f_{max}$, (b) $f = 83\%f_{max}$, (c) $f = 100\%f_{max}$, (d) Erreurs relatives sur le débit massique (\dot{m}) et sur la température totale en aval de la plaque à orifice 1 ($T0_{av}$) – Après calage du modèle

sont :

1. le calcul de la température instantanée dans la composante moteur, $T_m(t)$
2. l'estimation des pertes de débit massique à travers la composante moteur
3. l'utilisation d'une pression constante à la sortie du deuxième orifice

Idéalement la température instantanée dans la composante moteur serait mesurée, ce qui n'est pas envisageable vu les températures élevées dans cette région et les fréquences en jeu.

Par conséquent, l'erreur induite par l'utilisation d'un modèle afin de calculer la température instantanée affecte nécessairement la fidélité des résultats obtenus avec la modélisation.

Comme décrit à la section 3.1.1, les fuites dans la composante moteur ne sont pas mesurées dans le banc d'essai. Afin de simplifier la présentation des résultats, il a été supposé que ces fuites étaient constantes pour tous les cas simulés. Par contre, elles sont certainement dépendantes des conditions d'opération de la composante moteur. L'erreur sur l'estimation des fuites affecte dans un premier temps la valeur expérimentale du débit massique. De plus, elle affecte la valeur calculée de la température des gaz dans la composante moteur. Une augmentation de 2% des fuites dans le modèle numérique, a pour effet de diminuer de 0.5% le débit massique moyen (\dot{m}) calculé et d'augmenter de 1% la température totale ($T0_{av}$) calculée. L'effet de l'augmentation des fuites sur la variation de la pression dans la conduite est illustré à la figure 5.9. Ces résultats montrent que l'impact de la valeur de la fuite est relativement faible sur les résultats numériques.

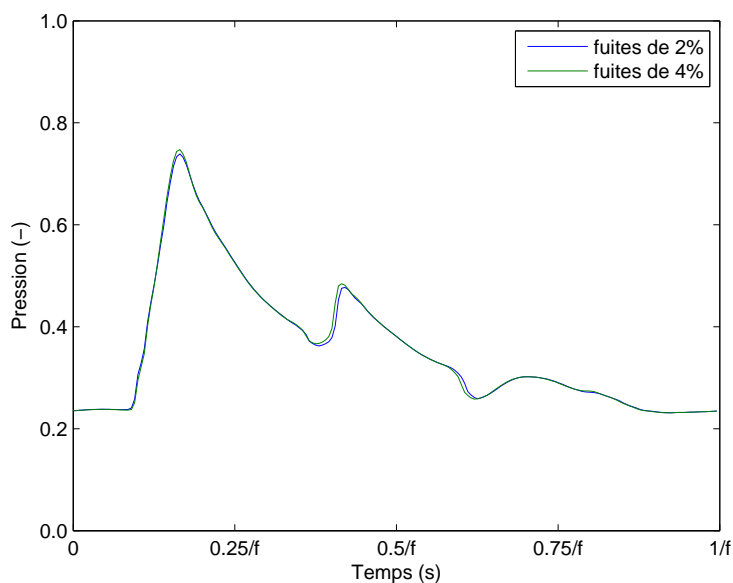


Figure 5.9 Effet de l'augmentation de la fuite de 2% à 4% sur la variation de la pression statique en amont de la première plaque à orifice (p_{am}/p_{ref})

Ensuite, la pression à la sortie de la deuxième plaque à orifice (p_e) a été mesurée uniquement à l'aide d'un capteur de pression à basse fréquence, ce qui a permis d'obtenir une moyenne temporelle de cette mesure. Par contre, il est possible que la pression à cette position varie de façon plus ou moins importante. Comme décrit à la section 3.1.1, la section de la conduite d'échappement, où la température p_e est mesurée, était déjà existante dans le banc d'essai et il avait été choisi de la conserver telle quel. L'installation d'un capteur de pression

haute fréquence aurait requis de modifier la conduite afin de pouvoir recevoir ce capteur et d'amener une alimentation d'eau afin de refroidir ce capteur. Bref, l'utilisation d'un capteur à basse fréquence pour mesurer la pression à cet endroit constitue une lacune du montage expérimental.

En résumé, les résultats obtenus numériquement à l'aide du modèle unidimensionnel, instationnaire et compressible ont été comparés aux valeurs mesurées dans le banc d'essai. Cette comparaison a permis de valider que le modèle permettait de simuler avec assez de fiabilité les propriétés de l'écoulement dans une conduite munie de deux orifices et ce, pour différentes conditions testées.

Finalement, le temps de calcul requis pour chacun des cas étudiés dans cette section est résumé dans le tableau 5.4. Les temps obtenus démontrent l'avantage principal d'utiliser un modèle 1D qui est d'obtenir une solution d'une certaine précision dans des temps relativement courts.

Tableau 5.4 Écoulement instationnaire à travers une conduite - Temps de calcul

Ratio des aires (géométrique), $\phi_{1_{geo}}$	Ratio des aires (géométrique), $\phi_{2_{geo}}$	Fréquence des cycles f	Temps de calcul (s)
0.71	0.54	$100\%f_{max}$	65
0.76	0.54	$100\%f_{max}$	61
0.80	0.54	$100\%f_{max}$	95
0.80	0.54	$67\%f_{max}$	91
0.80	0.54	$83\%f_{max}$	75

5.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire

Tel que présenté à la section 3.1.2, cette deuxième série de tests est effectuée avec une turbine à impulsion dans un écoulement instationnaire. Ces tests permettent de valider l'utilisation d'un modèle quasi-stationnaire pour la prédiction des performances de la turbine.

5.2.1 Procédure de test

Afin de s'assurer que le modèle est capable de simuler un ensemble de cas, deux paramètres sont variés durant les essais. Le premier paramètre correspond à la vitesse de rotation de la turbine (N). Cette vitesse est variée de 14,000 à 18,000 révolutions par minute (rpm). Par la suite, la fréquence d'évacuation des gaz chauds (f) est variée de 75% à 100% de la fréquence maximale tout en gardant la vitesse de rotation de la turbine à 15,000 rpm. Le tableau 5.5 résume les conditions testées.

Tableau 5.5 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Conditions testées

Fréquence, f	Vitesse de rotation, N (rév/min)
$100\%f_{max}$	14,000
$100\%f_{max}$	15,000
$100\%f_{max}$	16,000
$100\%f_{max}$	17,000
$100\%f_{max}$	18,000
$87\%f_{max}$	15,000
$75\%f_{max}$	15,000

5.2.2 Modélisation du montage expérimental

Pour ce montage, les propriétés à l'entrée et à la sortie de la turbine sont mesurées, ce qui permet de modéliser uniquement la turbine. La figure 5.10 illustre les paramètres du modèle.

À l'aide des valeurs de pression mesurées (p_1 et p_2) et de la carte de performance de la turbine, le débit massique à travers la turbine est calculé à chaque instant. Par la suite, les performances de la turbine sont évaluées à l'aide de la carte du rendement de la turbine. Les cartes de turbine utilisées dans le modèle correspondent aux cartes présentées dans Benson (1982, fig. 9.2 et fig. 9.6) pour une turbine à impulsion.

Dû à l'absence d'instrument de mesure à haute fréquence pour les températures, la température totale à l'entrée de la turbine est considérée constante et égale à la température T_{01} mesurée. Cette simplification est nécessaire puisque aucune estimation fidèle de la variation

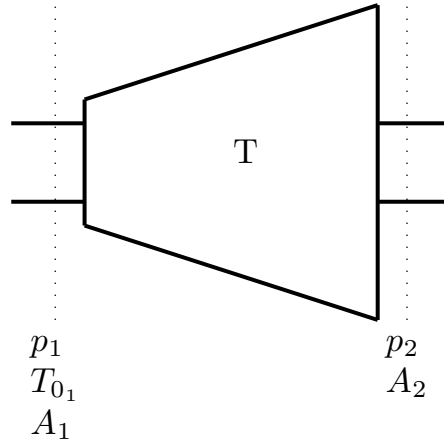


Figure 5.10 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Représentation du domaine

temporelle de la température n'est possible.

5.2.3 Calage du modèle

Comme des cartes génériques d'une turbine sont utilisées afin de prédire le comportement quasi-stationnaire de la turbine testée, le calage est effectué en mettant à l'échelle ces cartes génériques. Pour effectuer le calage, toutes les conditions testées sont utilisées afin de réduire l'écart entre les résultats numériques et les valeurs mesurées. Les résultats obtenus suite au calage sont par la suite présentés à la section 5.2.4.

Dans un premier temps, la carte de performance de la turbine est mise à l'échelle. Dans le cas d'une turbine à impulsion, le débit massique est essentiellement contrôlé par le col du stator. Par conséquent, le débit massique corrigé maximal de la carte de performance doit correspondre au débit massique corrigé lorsque l'écoulement est sonique au col du stator.

Le débit massique corrigé à l'entrée de la turbine est donnée par l'équation suivante

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = A_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (5.4)$$

En supposant une évolution isentropique entre l'entrée de la turbine et le col du stator, cette équation peut être écrite telle que

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = C_{dt} A_t \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M_t \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2 \right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (5.5)$$

où $(C_{dt}A_t)$ et M_t correspondent respectivement à l'aire effective et au nombre de Mach au col du stator. Par conséquent, le débit massique corrigé maximal est atteint lorsque $M_t = 1$. Pour un stator donné, le débit massique corrigé maximal correspond donc à

$$\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}\right)_{max} = C_{dt}A_t\sqrt{\frac{\gamma}{R}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (5.6)$$

Ce paramètre permet ainsi de mettre à l'échelle l'axe horizontale $(\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01})$ de la carte de performance. Pour mettre à l'échelle l'axe vertical, qui correspond au rapport de pression de part et d'autre de la turbine (p_{01}/p_2) , un facteur d'échelle RP_M est utilisé. Par conséquent, en variant les paramètres C_{dt} et RP_M , ceci permet de modifier l'échelle de la carte de performance de la turbine afin d'approcher les débits massiques calculés aux débits massiques mesurés.

De façon similaire, la carte de rendement de la turbine est ajustée. Dans ce cas-ci, l'axe vertical (η_{TS}) de la carte de rendement est mis à l'échelle à l'aide d'un facteur, noté η_M . L'axe horizontal, qui correspond au rapport des vitesses (v/C_{is}) , est aussi mis à l'échelle à l'aide d'un facteur, noté RV_M . Ces facteurs sont ajustés afin d'approcher les puissances calculées aux puissances mesurées.

L'effet de chaque paramètre d'ajustement sur chacune des valeurs de comparaison, soit la moyenne temporelle du débit massique et de la puissance, est maintenant présenté. Les résultats sont obtenus en faisant varier un seul paramètre d'ajustement à la fois. L'effet de chacun de ces paramètres sur les valeurs de comparaison est illustré comme un pourcentage par rapport aux valeurs de référence qui sont obtenues avec $C_{dt} = 1$, $RP_M = 1$, $\eta_M = 1$, $RV_M = 1$.

Moyenne temporelle du débit massique

L'effet de chaque paramètre d'ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique est illustré à la figure 5.11.

Comme le débit massique est calculé à partir de la carte de performance de la turbine, ce paramètre est uniquement fonction du coefficient de décharge au col du stator et du facteur d'échelle sur le rapport de pression. La figure 5.11 montre qu'en diminuant le coefficient de décharge C_{dt} ou en augmentant le facteur d'échelle RP_M , la moyenne temporelle du débit massique est réduite.

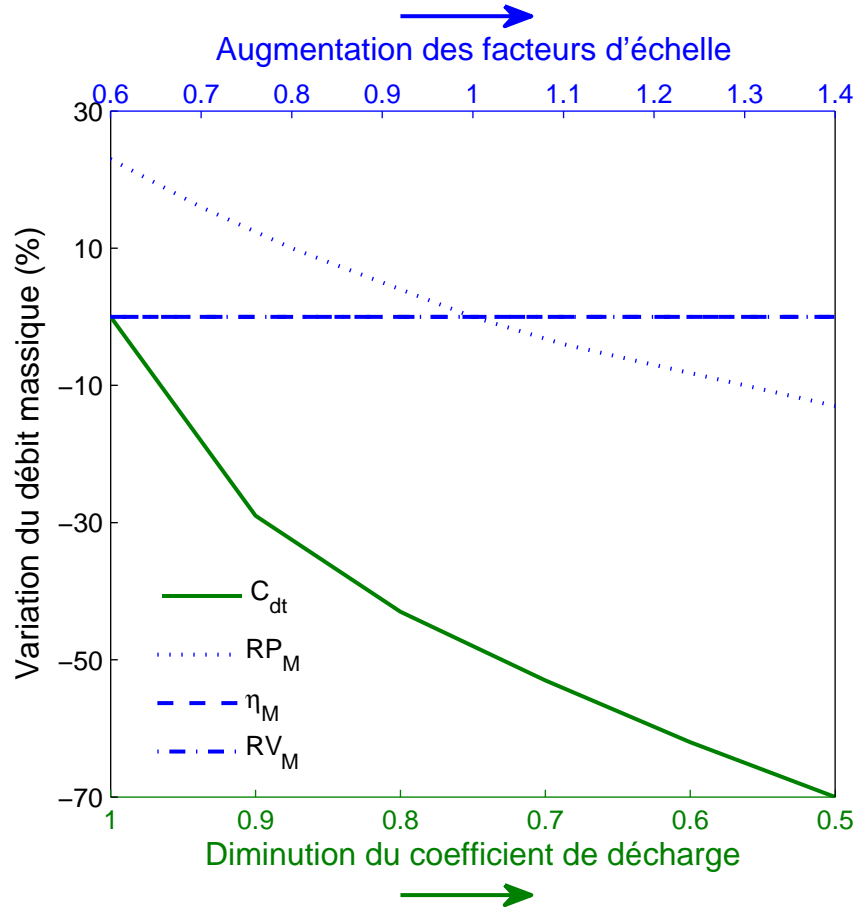


Figure 5.11 Effet des constantes d'ajustement sur la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m})

Moyenne temporelle de la puissance

Considérons maintenant l'effet des paramètres d'ajustement sur la moyenne temporelle de la puissance délivrée par la turbine. La figure 5.12 présente les résultats obtenus.

Le coefficient de décharge C_{dt} et le facteur d'échelle RP_M influencent la quantité de débit massique et par le fait même influence la puissance délivrée par la turbine. Par conséquent, si moins de débit passe dans la turbine, moins de puissance peut être délivrée. Par ailleurs, l'ajustement des facteurs d'échelle η_M et RV_M permet d'ajuster la courbe du rendement de la turbine. Plus le multiplicateur η_M est élevé, plus le rendement de la turbine est élevé et par conséquent, plus la puissance calculée est augmentée. À l'inverse, plus le multiplicateur RV_M est élevé, plus la puissance calculée est faible.

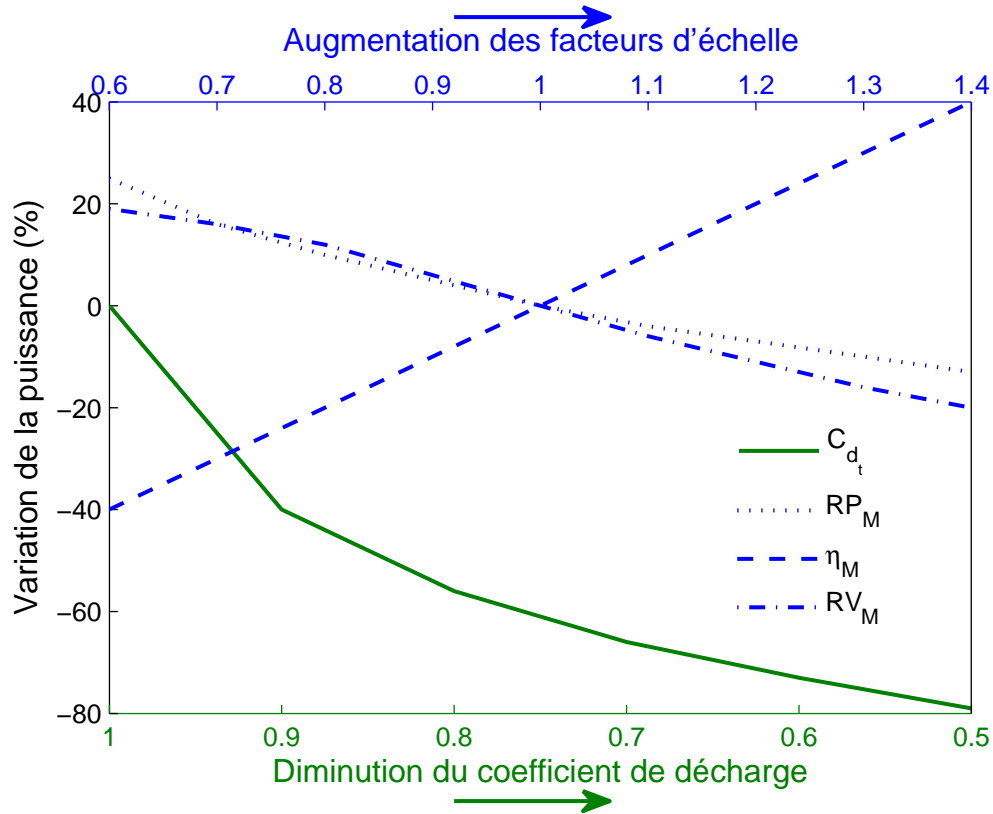


Figure 5.12 Effet des constantes d'ajustement sur la moyenne temporelle de la puissance (P)

En résumé, les paramètres d'ajustement C_{dt} et RP_M permettent de mettre à l'échelle la carte de performance en rapprochant les valeurs calculées du débit massique aux valeurs mesurées. Par la suite, les paramètres d'ajustement η_M et RV_M permettent d'ajuster la puissance calculée. Le tableau 5.6 présente les valeurs des quatre paramètres d'ajustement obtenues suite au calage du modèle avec les données expérimentales.

Tableau 5.6 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire - Constantes d'ajustement du modèle

Constantes d'ajustement	Valeur
Carte de performance	
Débit massique corrigé, C_{dt}	0.90
Rapport de pression, RP_M	3.5
Carte de rendement	
Rendement, η_M	0.50
Rapport de vitesse, RV_M	0.60

5.2.4 Résultats et discussion

Une fois les constantes d'ajustement fixées, le modèle est utilisé afin de simuler tous les cas testés. Cette section présente la comparaison entre les résultats numériques et les valeurs mesurées. Les résultats dans cette section sont présentés en terme d'erreurs relatives sur la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m}) et sur la moyenne temporelle de la puissance (P). Ces erreurs relatives sont calculées telles que

$$e_r(\dot{m}) = \frac{\dot{m}_{exp} - \dot{m}_{num}}{\dot{m}_{exp}} \quad (5.7)$$

$$e_r(P) = \frac{P_{exp} - P_{num}}{P_{exp}} \quad (5.8)$$

Comme pour le cas du premier montage, la moyenne temporelle du débit massique (\dot{m}) est calculée telle que

$$\dot{m} = \dot{m}_{coriolis} + \dot{m}_f - \dot{m}_{perte} \quad (5.9)$$

La perte utilisée (\dot{m}_{perte}) pour ce cas est fixé à 2% du débit massique d'air mesuré dans le banc d'essai.

La figure 5.13 illustre les résultats obtenus en faisant varier la vitesse de rotation du rotor de la turbine. L'erreur sur le débit massique moyen varie entre +7% à -5%. De plus, la tendance semble montrer que le modèle numérique surestime le débit massique lorsque les vitesses de rotation sont élevées et sous-estime le débit massique à basse vitesse.

Les erreurs relatives sur la puissance sont plus importantes et varient de +10% à -10%. Comme le calcul du débit massique est requis afin d'évaluer la puissance, il semble normal que les erreurs sur la puissance soient plus importantes. De plus, la fluctuation de l'erreur sur la puissance est similaire à celle sur le débit massique.

La figure 5.14 présente quant à elle les résultats obtenus en variant la fréquence du cycle d'ouverture-fermeture du dispositif d'échappement. Dans ce cas, l'erreur sur le débit massique moyen varie entre -6% et +6% tandis que l'erreur sur la puissance varie de +1% à +10%. Ces deux courbes semblent montrer que les erreurs varient linéairement avec la fréquence.

Les erreurs observées entre les données expérimentales et le modèle quasi-stationnaire de la turbine proviennent principalement de deux sources. La première source est les erreurs de modélisation engendrées par la simplification des phénomènes physiques complexes dans la turbine par un modèle quasi-stationnaire. Cette source d'erreur est accrue par le fait que les caractéristiques stationnaires spécifiques à la turbine testée ne sont pas connues. Par conséquent, l'utilisation d'une carte de turbine typique ne représente pas nécessairement le

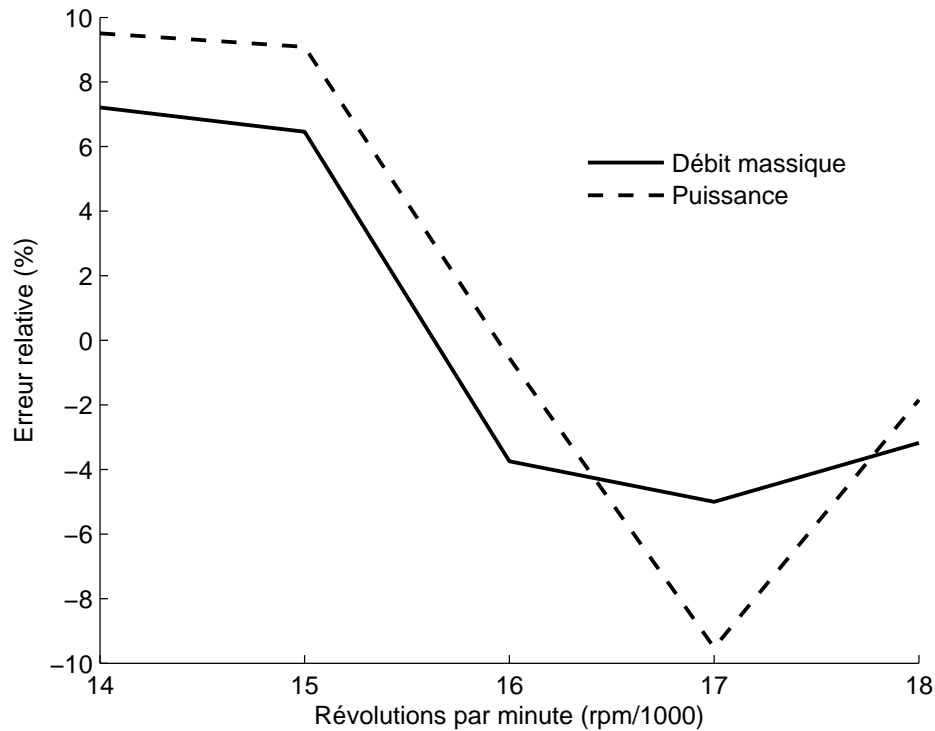


Figure 5.13 Moyenne temporelle du débit massique et de la puissance pour différentes vitesses de rotation avec $f = 100\%f_{max}$

comportement en régime permanent réel de la turbine testée.

Finalement, la deuxième source d'erreur est causée par le manque de données expérimentales afin de simuler correctement les conditions d'entrées de la turbine. La principale source d'erreur vient certainement de l'utilisation d'une température totale constante à l'entrée de la turbine (T_{01}). Cette propriété influence le calcul du débit massique à travers la turbine et influence la puissance puisque la température totale détermine la quantité d'énergie disponible dans le fluide.

Cette comparaison comporte aussi ces limites puisque seulement des moyennes temporelles sont comparées. Il est donc impossible de savoir si la variation temporelle du débit massique et de la puissance calculées à l'aide du modèle numérique sont valides. Bref, il est difficile de conclure sur la validité d'un modèle quasi-stationnaire pour modéliser la turbine sans pouvoir comparer l'évolution de propriétés dans le temps. De plus, l'hypothèse d'une température totale constante limite aussi les conclusions possibles sur la validité de ce modèle.

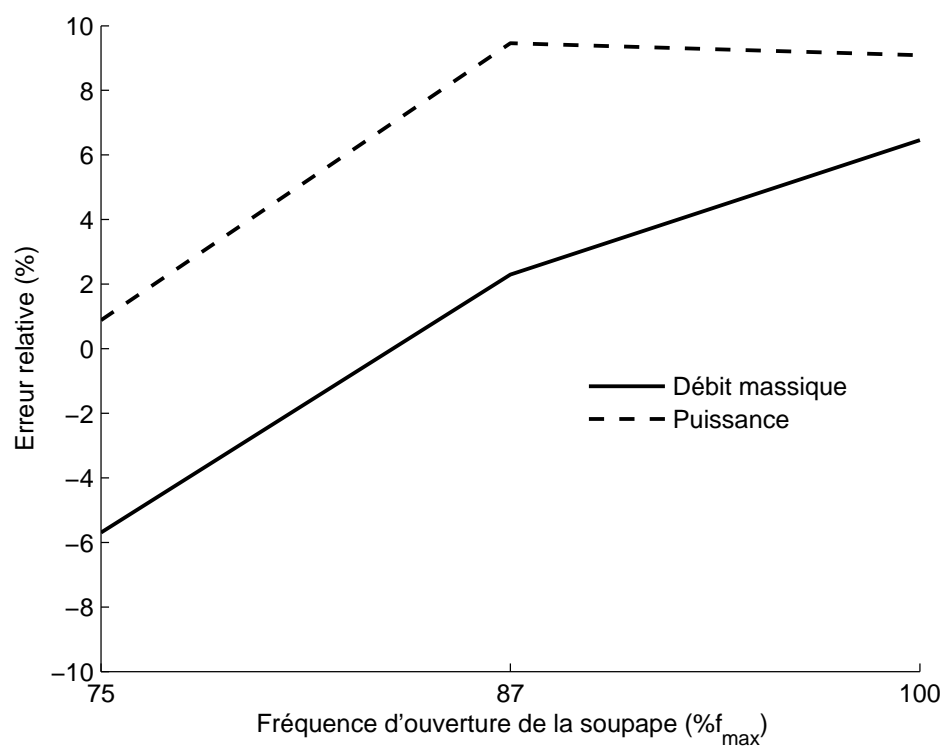


Figure 5.14 Moyenne temporelle du débit massique et de la puissance pour différentes fréquences avec $N = 15,000rpm$

CHAPITRE 6 CONCLUSION

Une synthèse du travail présenté dans ce mémoire est maintenant exposée. Elle permet de souligner les principales conclusions de l'ensemble du projet. Les directions futures quant au développement et à l'application du modèle sont aussi discutées.

6.1 Synthèse des travaux

Un modèle unidimensionnel a été développé et programmé dans Matlab pour simuler l'écoulement instationnaire dans une conduite pouvant mener à une turbine. Ce modèle est basé principalement sur les travaux de trois auteurs. Le développement des équations régissant l'écoulement, du facteur de friction et du facteur de transfert de chaleur sont basés sur les travaux de Costall (2007) et Winterbone and Pearson (2000). Par ailleurs, le développement des conditions aux frontières est basé sur le travail de Benson (1982) qui décrit les équations nécessaires afin de simuler les interactions aux extrémités du domaine en fonction de la nature de la frontière. Une seule condition frontière a dû être ajoutée au modèle afin de simuler les particularités du dispositif qui fait varier l'aire à la sortie de la composante moteur. Par contre, les détails de cette frontière n'ont pas été exposés dans ce travail pour des raisons de confidentialité.

Une vérification du modèle a permis de comparer la solution numérique à la solution exacte pour des cas théoriques qui peuvent être résolus analytiquement. Afin de vérifier plus particulièrement l'implémentation des conditions aux frontières, les résultats numériques ont aussi été comparés à des données publiées.

Dans le but de confirmer la validité d'un modèle unidimensionnel, la démarche a consisté à préparer deux montages expérimentaux afin de recueillir des données quant aux propriétés de l'écoulement à travers une conduite et aux performances d'une turbine. Ces données ont servi par la suite à la validation du modèle en comparant les valeurs prédites aux valeurs mesurées.

Les premiers essais ont été effectués avec une conduite munie de deux plaques à orifice. Ces plaques à orifice ont permis de modifier les restrictions dans la conduite afin de simuler l'effet que pourrait avoir des composantes en aval de la composante moteur. Ces tests ont aussi été effectués avec une composante moteur qui possède des caractéristiques différentes de celles des moteurs à piston conventionnels qui sont généralement étudiées dans la littérature. Par conséquent, ce montage a permis de valider le modèle unidimensionnel pour une forme d'onde

de pression et d'onde de température générée par la composante moteur à l'étude.

Ensuite, le deuxième montage expérimental a permis de mesurer les performances réelles d'une turbine lorsque alimentée par un écoulement instationnaire et de caractériser les propriétés de l'écoulement à l'entrée et à la sortie de la turbine. L'objectif de ce montage était de valider si le comportement de la turbine s'approche du comportement quasi-stationnaire lorsqu'alimentée par l'écoulement généré par la composante moteur. Pour cette raison, les essais ont été effectués avec la composante moteur au lieu d'utiliser un générateur d'impulsions.

La première série de tests effectuée avec uniquement une conduite a permis de démontrer que le modèle 1D permettait de calculer fidèlement la forme de l'onde de pression dans la conduite. Par contre, les résultats ont aussi montré que l'utilisation d'un coefficient de décharge en fonction du nombre de Reynolds local et de la géométrie de l'orifice pourrait réduire les différences observées entre les résultats numériques et expérimentaux. Par ailleurs, les résultats avec la turbine ont montrés une certaine variabilité sur les erreurs de débit massique et de puissance. Pour ces essais, seules des moyennes temporelles ont pu être comparées, ce qui limite l'analyse des différences entre les valeurs prédites et mesurées. De plus, l'hypothèse d'une température totale constante à l'entrée de la turbine introduit nécessairement une erreur importante sur les résultats obtenus numériquement.

En bref, les essais expérimentaux effectués ont montré que l'observation du comportement instationnaire comporte plusieurs complexités. Le manque d'instrumentation à haute fréquence peut rendre la comparaison entre les données expérimentales et les données numériques plus difficile. Malgré cette difficulté, les principaux objectifs de ce travail ont été remplis. La modélisation unidimensionnelle a pu être validée à l'aide du premier montage expérimental tandis que la validation du modèle quasi-stationnaire pour la turbine a été validée à l'aide des essais mise en œuvre avec une turbine à impulsion. De plus, les temps de calcul obtenus lors de la simulation du premier montage expérimental ont montré que le modèle 1D permettait d'obtenir une solution dans des temps raisonnablement courts.

6.2 Améliorations futures

6.2.1 Écoulement instationnaire à travers une conduite

Les résultats ont montrés que la modélisation unidimensionnelle de la conduite permettait de prédire assez fidèlement les propriétés de l'écoulement dans la conduite. Par ailleurs, il semble que certaines améliorations pourraient encore être implémentées au modèle afin d'augmenter la précision des résultats.

Le modèle actuel suppose que le gaz est caloriquement parfait, ce qui implique que les propriétés c_p , c_v , R et γ sont considérées comme constantes. Par ailleurs, les variations de température et de pression peuvent être importantes à l'intérieur de la conduite. De plus, la composition du gaz (proportion d'air, de produits de la combustion et de carburant non brûlé) qui entre dans la conduite peut varier dans le temps. Pour ces raisons, l'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait est nécessairement une approximation. Par conséquent, la modélisation de la variation des propriétés du gaz ainsi que sa composition permettrait une meilleure représentation du gaz réel.

Par la suite, afin de tenir compte des effets causés par les courbures dans la conduite, un modèle de perte en fonction des courbes pourrait être implémenté au modèle. Ce type de modèle a déjà fait l'objet d'étude et son implémentation serait relativement simple (voir Costall, 2007).

6.2.2 Performance d'une turbine dans un écoulement instationnaire

Les améliorations futures quant à la modélisation de l'écoulement à travers la turbine sont multiples. Les items présentés dans cette section ne correspondent pas à une liste exhaustive mais permettent d'identifier les principales améliorations à court et long terme qui devraient être lancées.

Un modèle 1D, tel que proposé par Costall (2007), devrait être considéré. Ce modèle permettrait de simuler les effets d'inertie dans le volume entre l'extrémité de la conduite et l'entrée du rotor en modélisant ce volume par une conduite convergente. La méthode numérique utilisée pour résoudre l'écoulement à travers la conduite serait alors utilisée pour simuler l'écoulement dans cette section de la turbine. Par contre, comme le volume des passages du rotor est relativement faible, un modèle quasi-stationnaire pourrait être suffisant afin de prédire les propriétés à travers le rotor. Par conséquent, un tel modèle permettrait de simuler la géométrie de l'admission et du stator de la turbine et de considérer l'impact des différentes géométries sur l'écoulement.

Afin de valider avec plus de fidélité un modèle de turbine, de nouveaux essais expérimentaux devraient être mis en œuvre. La première étape consisterait à tester une composante moteur instrumentée avec une turbine afin de simuler l'écoulement à travers l'ensemble conduite-turbine. La mesure de la pression statique instantanée dans la composante moteur permettrait de calculer la variation temporelle de la température à l'aide du modèle utilisé pour les essais avec la conduite (section 5.1). La variation temporelle de la température à l'entrée de la turbine pourrait alors être estimée en modélisant l'écoulement à travers la conduite, ce qui permettrait une validation plus fiable du modèle de la turbine. Il serait aussi préférable de

tester la turbine dans un banc d'essai dans des conditions stationnaires afin de connaître le comportement spécifique de la turbine en régime permanent, ce qui permettrait d'isoler l'effet de l'instationarité de l'écoulement sur la performance de la turbine.

Des changements au niveau de l'instrumentation du banc d'essai seraient requis afin de mieux simuler les conditions d'entrée de la turbine et d'améliorer la comparaison entre les valeurs prédites et mesurées. L'ajout d'une pression totale instantanée à l'entrée de la turbine permettrait de calculer le nombre de Mach instantané à cette position. Pour ce faire, une validation de la méthode et de la fiabilité de la mesure de pression totale dans la conduite devrait être réalisée. Le calage du modèle pourrait alors être effectué à l'aide de la variation temporelle du nombre de Mach au lieu d'utiliser uniquement des moyennes temporelles. Similairement, la mesure du couple à haute fréquence permettrait de comparer la variation du couple mesuré avec celle calculée. Par conséquent, ces données permettraient une meilleure calibration du modèle et une meilleure compréhension de l'écoulement dans la turbine.

RÉFÉRENCES

- J. D. Anderson, *Modern compressible flow : with historical perspective*, 3e éd. New York : McGraw-Hill, 2003.
- P. H. Azoury, *Engineering applications of unsteady fluid flow*. Chichester, Toronto : Wiley, 1992.
- N. C. Baines, “Turbocharger turbine pulse flow performance and modelling - 25 years on”, dans *9th International Conference on Turbochargers and Turbocharging - Institution of Mechanical Engineers, Combustion Engines and Fuel Group*, London, UK, 2010, pp. 357–362.
- R. S. Benson, *The thermodynamics and gas dynamics of internal-combustion engines*. Oxford, UK : Clarendon Press, 1982, vol. 1.
- R. S. Benson, R. D. Garg, et W. D., “A numerical solution of unsteady flow problems”, pp. 117–144, 1964.
- C. D. Copeland, M.-B. R. F. Newton, P., et M. Seiler, “A comparison of timescales within a pulsed flow turbocharger turbine”, dans *10th International Conference on Turbochargers and Turbocharging - Institution of Mechanical Engineers*, London, UK, 2012, pp. 389–404.
- A. Costall, S. Szymko, R. F. Martinez-Botas, D. Filsinger, et D. Ninkovic, “Assessment of unsteady behavior in turbocharger turbines”, dans *Proceedings of the ASME Turbo expo*, Barcelona, Spain, 2006, pp. 1023–1038.
- A. Costall, “A one-dimensional study of unsteady wave propagation in turbocharger turbines”, Thèse de doctorat, Imperial College, University of London, 2007.
- Crane, “Flow of fluids through valves, fittings, and pipe”, Crane Co., Rapp. tech. No.410M, 1982.
- A. S. George, R. Driscoll, E. Gutmark, et M. D., “Experimental comparison of axial turbine performance under steady and pulsating flows”, dans *Proceedings of the ASME Turbo expo*, Dusseldorf, Germany, 2014.
- H. Lomax, T. H. Pulliam, et D. W. Zingg, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Berlin : Springer, 2001.

R. D. Richtmyer, “Flow measuring techniques in steady and pulsating compressible flows”, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, Rapp. tech., 2010.

P. Swamee et A. K. Jain, “Explicit equations for pipe-flow problems”, *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 102, no. 5, pp. 657–664, 1976.

E. F. Toro, *Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*, 3e éd. Berlin : Springer, 2009.

D. E. Winterbone et R. J. Pearson, *Theory of engine manifold design : wave action methods for IC engines*. Warrendale, Pa : Society of Automotive Engineers, 2000.

D. Winterbone et R. J. Pearson, *Design techniques for engine manifolds : wave action methods for IC engines*. Warrendale, Pa : Society of Automotive Engineers, 1999.

ANNEXE A Développement des équations régissant l'écoulement

A.1 Développement des équations de conservation

Le développement détaillé des équations de conservation est présenté dans cette section afin de mettre en évidence les simplifications effectuées. Afin de dériver ces équations, considérons la section infinitésimale du tuyau présentée à la figure 3.4.

Comme décrit dans la section 3.2.1, les propriétés sont uniformes sur chacune des sections transversales et la vitesse de l'écoulement est considérée positive lorsque le fluide se déplace vers la droite. De plus, les équations développées sont valides uniquement pour des changements d'aire de section graduels. Par conséquent, l'angle de la paroi, noté θ , doit être petit.

A.1.1 Conservation de la masse

La loi de la conservation de la masse est basée sur le principe que la masse ne peut être créée ni détruite. Par conséquent, le débit massique net sortant du volume de contrôle doit évaluer le taux de diminution de la masse à l'intérieur du volume de contrôle, ce qui s'écrit sous la forme différentielle suivante

$$\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(A + \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \Delta x \right) \Delta x \right]$$

ou encore

$$\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho A \Delta x) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \Delta x^2 \right)$$

Le dernier terme de cette équation peut être négligé puisque que Δx^2 est du deuxième ordre. Par conséquent, l'équation de conservation de la masse correspond à

$$\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial(\rho A \Delta x)}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement implique que le taux d'augmentation de la quantité de mouvement du fluide à travers le volume de contrôle est égal à la force nette exercée sur ce dernier. En l'absence de forces volumiques, les seules forces présentes sont les forces de pression et de friction soumises aux surfaces du volume de contrôle.

Taux d'augmentation de la quantité de mouvement. Le taux d'augmentation de la quantité de mouvement du fluide peut être décomposé en deux termes, soit le taux de changement de la quantité de mouvement à l'intérieur du volume de contrôle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho u \left(A + \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \Delta x \right) \Delta x \right]$$

et le flux net de quantité de mouvement à travers le volume de contrôle

$$\frac{\partial (\rho u^2 A)}{\partial x} \Delta x$$

En négligeant le terme de deuxième ordre (Δx^2) le taux d'augmentation de la quantité de mouvement du fluide devient

$$\frac{\partial (\rho u A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 A)}{\partial x} \Delta x \quad (\text{A.2})$$

Forces de pression. Les forces de pression sur le volume de contrôle sont causées par la différence de pression entre les deux surfaces transversales du volume

$$-\frac{\partial (pA)}{\partial x} \Delta x$$

et par la composante axiale de la pression à la paroi, qui est non-nulle uniquement lorsque l'aire de section du volume de contrôle varie.

$$\left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \frac{dA}{dx} \Delta x$$

En négligeant le terme de deuxième ordre (Δx^2), les forces de pression sur le volume de contrôle correspondent à

$$-\frac{\partial (pA)}{\partial x} \Delta x + p \frac{dA}{dx} \Delta x \quad (\text{A.3})$$

Par convention, les forces sont considérées positives dans la direction positive de l'axe des x. Par conséquent, comme la force soumise par la pression aux extrémités est toujours orientée vers l'intérieur du volume de contrôle, ce terme est alors négatif.

Forces de friction. Finalement, la force de friction entre le fluide en mouvement et la paroi fixe est modélisée par une contrainte de cisaillement, τ_w , s'opposant à l'écoulement. La

composante axiale de la force de friction est donnée par

$$-\pi \left(D + \frac{1}{2} \frac{dD}{dx} \Delta x \right) \tau_w \cos(\theta) \Delta x$$

où la contrainte de cisaillement à la paroi de la conduite est représentée par un coefficient de friction, f , tel que

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho u |u| f$$

Si le terme de deuxième ordre (Δx^2) est négligé alors la composante axiale de la force de friction devient

$$-\pi D \tau_w \cos(\theta) \Delta x$$

De plus, comme l'angle θ est petit,

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

où θ^2 peut être négligé puisqu'il est de deuxième ordre.

Par conséquent, la force de friction correspond à

$$-\pi D \tau_w \Delta x$$

En introduisant une variable G définie par

$$G = \frac{1}{2} u |u| f \frac{4}{D} \quad (\text{A.4})$$

le terme de friction devient

$$-\rho G A \Delta x \quad (\text{A.5})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue en combinant les termes (A.2), (A.3) et (A.5), ce qui donne

$$\frac{\partial (\rho u A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 A)}{\partial t} \Delta x = p \frac{dA}{dx} \Delta x - \frac{\partial (pA)}{\partial x} \Delta x - \rho G A \Delta x \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie implique que le taux d'augmentation de l'énergie totale à l'intérieur du volume de contrôle égale le taux de transfert d'énergie à la paroi. En l'absence de travail, l'unique source d'énergie transmise à la paroi du tuyau est causée par le transfert de chaleur.

Taux d'augmentation de l'énergie totale. Le taux d'augmentation de l'énergie totale du fluide se décompose en deux termes, soit le taux de changement de l'énergie interne totale à l'intérieur du volume de contrôle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho e_0 \left(A + \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \Delta x \right) \Delta x \right]$$

et le flux net d'enthalpie totale à travers le volume de contrôle.

$$\frac{\partial (\rho u h_0 A)}{\partial x} \Delta x$$

En négligeant le terme de deuxième ordre (Δx^2), le taux d'augmentation de l'énergie totale devient

$$\frac{\partial (\rho e_0 A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u h_0 A)}{\partial x} \Delta x \quad (\text{A.7})$$

Transfert de chaleur. Si le taux de transfert de chaleur par unité de masse est noté q , alors le taux de transfert de chaleur par convection est

$$\rho q A \Delta x \quad (\text{A.8})$$

Par convention, le taux de transfert de chaleur est positif lorsque la chaleur est transférée vers le volume de contrôle.

L'équation de conservation de l'énergie est obtenue en combinant les termes (A.7) et (A.8), ce qui donne

$$\frac{\partial (\rho e_0 A \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u h_0 A)}{\partial x} \Delta x = \rho q A \Delta x \quad (\text{A.9})$$

A.2 Méthode numérique

Cette section présente le développement mathématique du schéma de Lax-Wendroff en deux étapes, Ce schéma numérique est basé sur la forme conservative des équations de conservation présentée à la section 3.2.1. Par ailleurs, son développement mathématique est basé sur le développement en série de Taylor.

Développement en série de Taylor . Le développement en série de Taylor d'une variable quelconque, y , en fonction de x s'écrit

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \dots \quad (\text{A.10a})$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \dots \quad (\text{A.10b})$$

À partir de ces expressions, il est possible de développer différentes formulations afin d'évaluer une dérivée. Celles qui seront utiles au développement de la méthode de Lax-Wendroff sont la formule décentrée en avant d'ordre 1 qui est obtenue directement à partir du premier développement (équ. A.10a),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{A.11})$$

et la formule centrée d'ordre 2 qui est obtenue en soustrayant l'équation A.10b à l'équation A.10a,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (\text{A.12})$$

Les expressions des dérivées obtenues grâce au développement de Taylor sont utilisées afin de résoudre l'équation (3.7). Pour que la méthode soit d'ordre 2 en temps et en espace, les dérivées partielles en temps ($\partial \mathbf{W} / \partial t$) et en espace ($\partial \mathbf{F} / \partial x$) sont évaluées à l'aide de la formule centrée autour du point $(i, n+1/2)$. La valeur du terme source est obtenue à partir d'une moyenne dans l'espace, ce qui donne

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{C}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (\text{A.13})$$

Afin de résoudre cette équation, les termes au temps $n + 1/2$ doivent être évalués. Deux nouvelles expressions sont obtenues en utilisant une dérivée décentrée en avant en temps et une dérivée centrée dans l'espace autour des points $(i+1/2, n)$ et $(i-1/2, n)$. Une moyenne dans l'espace est utilisée pour le terme source. Les expressions ainsi obtenues permettent

alors de compléter le problème.

$$\mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{W}_{i+1}^n + \mathbf{W}_i^n] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{C}_i^n + \mathbf{C}_{i+1}^n] \quad (\text{A.14a})$$

$$\mathbf{W}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_{i-1}^n] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{C}_{i-1}^n + \mathbf{C}_i^n] \quad (\text{A.14b})$$

A.2.1 Limiteur de flux

La théorie relative au développement de ces méthodes est présentée par Winterbone and Pearson (2000). Afin de corriger la méthode de Lax-Wendroff en deux étapes pour qu'elle ne produise plus de fausses oscillations près des discontinuités, une correction est ajoutée au résultat obtenu précédemment,

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n+1} + TVD_{corr} \quad (\text{A.15})$$

La valeur de cette correction est calculée à partir de l'équation

$$TVD_{corr} = [\bar{\mathbf{G}}^+(r_i^+) + \bar{\mathbf{G}}^-(r_{i+1}^-)] \Delta \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^n - [\bar{\mathbf{G}}^+(r_{i-1}^+) + \bar{\mathbf{G}}^-(r_i^-)] \Delta \mathbf{W}_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (\text{A.16})$$

où

$$\Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n = W_{i+1}^n - W_i^n \quad (\text{A.17a})$$

$$\Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n = W_i^n - W_{i-1}^n \quad (\text{A.17b})$$

La fonction $\bar{\mathbf{G}}^\pm$ correspond à

$$\bar{\mathbf{G}}^\pm(r_i^\pm) = \frac{1}{2} C(\nu) [1 - \phi(r_i^\pm)] \quad (\text{A.18})$$

où

$$C(\nu) = \begin{cases} \nu(1-\nu), & \nu \leq 0.5 \\ 0.25, & \nu > 0.5 \end{cases}$$

Le limiteur ϕ dans l'équation (A.18) est défini par

$$\phi(r) = \begin{cases} \min(2r, 1), & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

où

$$\begin{aligned}
 r_{i-1}^+ &= \frac{\left(\Delta W_{i-\frac{3}{2}}^n \cdot \Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n\right)}{\left(\Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n\right)}, & r_i^- &= \frac{\left(\Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n\right)}{\left(\Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n\right)} \\
 r_i^+ &= \frac{\left(\Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n\right)}{\left(\Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n\right)}, & r_{i+1}^- &= \frac{\left(\Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i+\frac{3}{2}}^n\right)}{\left(\Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n\right)}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Dans le cas particulier où $i = i_{min} + 1$, la valeur de W_{i-2}^n se retrouve à l'extérieur du domaine. Pour ce cas particulier,

$$\Delta W_{i-\frac{3}{2}}^n = \Delta W_{i-\frac{1}{2}}^n$$

De façon similaire, lorsque $i = i_{max} - 1$, la relation suivante est utilisée

$$\Delta W_{i+\frac{3}{2}}^n = \Delta W_{i+\frac{1}{2}}^n$$

Cet algorithme est une approche simple qui permet de corriger les instabilités inhérentes aux techniques par différences finies d'ordre 2.

ANNEXE B Développement des conditions aux frontières

B.1 Méthode des caractéristiques

Le développement de la méthode des caractéristiques est présenté en détail par Benson (voir Benson, 1982). Cette section présente uniquement un sommaire du développement mathématique de la méthode.

B.1.1 Développement des invariants de Riemann

La méthode des caractéristiques est basée sur la forme non-conservative des équations de conservation, (éq. 3.10) et (éq. 3.11)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Dans le cas de la formulation isentropique, la relation isentropique pour un gaz caloriquement parfait remplace l'équation de la conservation de l'énergie. Cette relation relie la masse volumique à la vitesse du son telle que

$$\frac{\rho}{c^{\frac{2}{\gamma-1}}} = \text{constante}$$

En substituant la relation isentropique dans l'équation de conservation de la masse (éq. 3.10) et de conservation de la quantité de mouvement (éq. 3.11), ces équations deviennent respectivement

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{2}{\gamma-1} u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{2}{\gamma-1} c \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.2})$$

En considérant des droites dans l'espace qui sont définies telles que,

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \quad (\text{B.3})$$

il est possible de transformer les équations aux dérivées partielles (éq. B.1) et (éq. B.2) en équations différentielles ordinaires le long de ces droites.

Dans un premier temps, considérons la droite définie par

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad (\text{B.4})$$

En additionnant les équations (B.1) et (B.2) et en substituant les termes $u + c$ par l'équation (B.4), l'équation obtenue se simplifie et devient

$$dc + \frac{\gamma - 1}{2} du = 0$$

Cette relation indique qu'un paramètre λ , défini comme

$$\lambda = c + \frac{\gamma - 1}{2} u \quad (\text{B.5})$$

est constant le long de la droite $dx/dt = u + c$. Par conséquent, si une onde se déplace dans la direction positive à une vitesse $u + c$, alors la paramètre λ est constant le long de cette onde.

De façon similaire, en considérant la droite définie par

$$\frac{dx}{dt} = u - c$$

il est possible de montrer qu'il existe un paramètre β , défini tel que

$$\beta = c - \frac{\gamma - 1}{2} u \quad (\text{B.6})$$

qui est constant le long d'une onde qui se déplace vers la gauche à une vitesse $u - c$.

B.1.2 Évaluation des invariants de Riemann au temps précédent

Considérons la grille de calcul présenté à la figure 3.6. Les valeurs des invariants de Riemann aux points L et R sont évaluées à l'aide d'une interpolation linéaire entre les points qui leurs sont adjacents au temps n .

$$\lambda_L^n = \lambda_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\lambda_i^n - \lambda_{i-1}^n) \quad (\text{B.7a})$$

$$\beta_R^n = \beta_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\beta_{i+1}^n - \beta_i^n) \quad (\text{B.7b})$$

où

$$\delta x_L = x_i - x_L \quad (\text{B.8a})$$

$$\delta x_R = x_i - x_R \quad (\text{B.8b})$$

Il est alors nécessaire de déterminer des équations pour chacun des gradients, $\delta x_L/\Delta x$ et $\delta x_R/\Delta x$.

Dans un premier temps, considérons la caractéristique λ . La longueur δx_L correspond au déplacement axial de l'onde sur une période de temps Δt . Par conséquent, comme la vitesse de cette onde correspond à $u + c$ alors

$$\frac{\delta x_L}{\Delta t} = u_L + c_L \quad (\text{B.9})$$

La vitesse du gaz u_L et la vitesse du son c_L peuvent être obtenues à partir des invariants de Riemann telles que

$$u_L = \frac{\lambda_L - \beta_L}{\gamma - 1} \quad (\text{B.10})$$

$$c_L = \frac{\lambda_L + \beta_L}{2} \quad (\text{B.11})$$

En substituant les équations (B.10) et (B.11) dans l'équation (B.9), on obtient après réarrangement

$$\frac{\delta x_L}{\Delta t} = \Psi \lambda_L - \Phi \beta_L \quad (\text{B.12})$$

où

$$\Psi = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}, \quad \Phi = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}$$

Si les caractéristiques au point L (λ_L et β_L) sont remplacées par les interpolations linéaires

$$\lambda_L^n = \lambda_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\lambda_i^n - \lambda_{i-1}^n) \quad (\text{B.13a})$$

$$\beta_L^n = \beta_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\beta_i^n - \beta_{i-1}^n) \quad (\text{B.13b})$$

alors l'équation suivante est obtenue après réarrangement

$$\frac{\delta x_L}{\Delta x} = \frac{\Psi \lambda_i^n - \Phi \beta_i^n}{\Delta x / \Delta t + \Psi (\lambda_i^n - \lambda_{i-1}^n) - \Phi (\beta_i^n - \beta_{i-1}^n)} \quad (\text{B.14})$$

La même procédure est utilisé afin d'obtenir l'équation pour le gradient $\delta x_L/\Delta x$. L'équation obtenue pour ce gradient correspond alors à

$$\frac{\delta x_R}{\Delta x} = \frac{\Phi \lambda_i^n - \Psi \beta_i^n}{\Delta x/\Delta t + \Phi (\lambda_{i+1}^n - \lambda_i^n) - \Psi (\beta_{i+1}^n - \beta_i^n)} \quad (\text{B.15})$$

B.2 Extrémité fermée

Lorsque l'extrémité de la conduite est fermée, aucun écoulement ne peut être transmis. Par conséquent, la vitesse de l'écoulement à la frontière est nulle, $u = 0$. À partir de l'équation (3.37),

$$u = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{\gamma - 1}$$

ceci implique que

$$\lambda_{out} = \lambda_{in} \quad (\text{B.16})$$

De plus, comme il n'y a pas d'écoulement, il n'y a aucune correction pour l'entropie possible. Par conséquent, l'écoulement pour cette frontière est isentropique.

B.3 Extrémité ouverte

B.3.1 Débit sortant

Dans le cas d'un écoulement sortant, la variation d'entropie à travers la frontière peut être négligée. Par conséquent, l'équation isentropique (3.38),

$$c_s = c \left(\frac{p_{ref}}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

est utilisée afin de déterminer la vitesse du son à la frontière. En substituant p par p_e , on obtient

$$c = c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.17})$$

En insérant cette expression dans l'équation (3.36)

$$c = \frac{\lambda_{in} + \lambda_{out}}{2}$$

une relation pour la caractéristique de sortie est obtenue.

$$\lambda_{out} = 2c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - \lambda_{in} \quad (\text{B.18})$$

Dans le cas particulier où la pression de référence est choisie égale à la pression extérieure, l'équation (B.18) se simplifie et devient

$$\lambda_{out} = 2c_s - \lambda_{in} \quad (\text{B.19})$$

B.3.2 Débit entrant

Lorsque la conduite est ouverte et que le fluide dans le réservoir entre dans la conduite, la formulation non isentropique de la méthode des caractéristiques doit être utilisée puisque le niveau d'entropie à l'intérieur du tuyau est altéré par l'entropie du fluide qui entre dans le domaine. Afin de tenir compte de ce changement d'entropie, la caractéristique d'entrée devient

$$\lambda_{in_c} = \lambda_{in_n} + (d\lambda)_{entropie} \quad (\text{B.20})$$

L'augmentation de l'entropie est définie comme

$$(d\lambda)_{entropie} = \left(\frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \right) \left(\frac{(c_s)_c - (c_s)_n}{(c_s)_c} \right) \quad (\text{B.21})$$

Il est supposé que le gaz qui entre le tuyau se dilate de façon isentropique des conditions du réservoir, c_0 et p_0 , aux conditions à l'entrée du tuyau, c et p , tel qu'illustré à la figure 3.12. Le niveau d'entropie corrigé correspond alors au niveau d'entropie du fluide dans le réservoir, soit

$$(c_s)_c = c_0 \left(\frac{p_{ref}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.22})$$

Pour déterminer la relation entre λ_{in_c} et λ_{out_c} , utilisons l'équation de conservation de l'énergie à la frontière

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \quad (\text{B.23})$$

Pour un gaz caloriquement parfait, les relations

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad T = \frac{c^2}{\gamma R}$$

permettent de réarranger l'équation (B.23) sous la forme

$$c_0^2 = c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \quad (\text{B.24})$$

En substituant c et u par les équations (3.36) et (3.37), cette équation devient

$$c_0^2 = \left(\frac{\lambda_{inc} + \lambda_{out_c}}{2} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\lambda_{inc} - \lambda_{out_c}}{\gamma - 1} \right)^2 \quad (\text{B.25})$$

Après réarrangement, elle devient

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \lambda_{out_c}^2 - 2 \left(\frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} \right) \lambda_{inc} \lambda_{out_c} + \left\{ \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \lambda_{inc}^2 - 4c_0^2 \right\} = 0 \quad (\text{B.26})$$

L'unique solution physique à cette équation correspond à

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \right) \lambda_{inc} + \frac{2}{\gamma + 1} \sqrt{(\gamma^2 - 1) c_0^2 + 2(1 - \gamma) \lambda_{inc}^2} \quad (\text{B.27})$$

Cette équation est valide lorsque l'écoulement à travers la frontière est subsonique.

Écoulement critique Lorsque l'écoulement est critique à l'entrée du tuyau, la vitesse du gaz est égale à la vitesse du son,

$$-u = c \quad (\text{B.28})$$

La vitesse du gaz est alors négative puisque l'écoulement se dirige vers l'intérieur du tuyau. La solution pour un écoulement critique est obtenue en substituant c et u par les équations (3.36) et (3.37), ce qui donne

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right) \lambda_{inc} \quad (\text{B.29})$$

Par conséquent, l'écoulement est critique si la solution à l'équation (B.27) est

$$\lambda_{out_c} \geq \left(\frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right) \lambda_{inc} \quad (\text{B.30})$$

La solution générale à un débit entrant par une extrémité ouverte requiert l'utilisation d'une procédure itérative afin de déterminer les valeurs corrigées, λ_{inc} et λ_{out_c} , qui satisfont autant

la solution physique que l'équation de correction pour l'entropie (eq. B.20).

B.3.3 Cas limite

Afin de déterminer le sens de l'écoulement à travers l'extrémité ouverte, il faut examiner le cas limite, c'est-à-dire lorsque la vitesse à la frontière est nulle. Par convention, la vitesse est positive lorsque l'écoulement est vers la frontière. Par conséquent, l'écoulement se déverse vers l'extérieur lorsque

$$u > 0 \quad (\text{B.31})$$

ce qui est vrai lorsque

$$\lambda_{in_c} > \lambda_{out_c} \quad (\text{B.32})$$

En substituant cette inéquation dans l'équation (B.27), on obtient la relation suivante

$$\lambda_{in_c} > c_0 \quad (\text{B.33})$$

Dans le cas où la vitesse est nulle, la caractéristique d'entrée corrigée et non-corrigée sont équivalentes. Par conséquent, l'écoulement se déversera vers l'extérieur si

$$\lambda_{in_n} > c_0 \quad (\text{B.34})$$

Le diagramme de flux, présenté à la figure B.1, résume les étapes de calcul pour une extrémité ouverte.

B.4 Extrémité partiellement ouverte

B.4.1 Débit sortant

Lorsque le fluide se déverse vers l'extérieur, l'écoulement à travers l'orifice est considéré comme isentropique. Les équations nécessaires afin de relier les différentes conditions présentées à la figure 3.13, sont

la conservation de l'énergie

$$c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 = c_t^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_t^2 \quad (\text{B.35})$$

la conservation de la masse

$$\rho u A = \rho_t u_t A_t \quad (\text{B.36})$$

et la relation isentropique

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (\text{B.37})$$

En combinant les équations (B.35), (B.36), (B.37), la relation adimensionnelle suivante est obtenue

$$\left(\frac{u}{c_t} \right)^2 = \frac{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{c}{c_t} \right)^2 - 1 \right]}{\frac{1}{\phi^2} \left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{4}{\gamma-1}} - 1} \quad (\text{B.38})$$

Écoulement subsonique

Lorsque l'écoulement est subsonique, la pression au col de l'orifice atteint la pression à l'extérieur du tuyau,

$$p_t = p_e$$

Comme l'écoulement est isentropique, la vitesse du son au col correspond à

$$c_t = c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.39})$$

Cette équation est combinée à la définition de la vitesse du gaz (équ. 3.37), ce qui donne

$$\frac{u}{c_t} = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{(\gamma - 1) c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \quad (\text{B.40})$$

De façon similaire, en combinant la relation isentropique (équ. B.39) à l'équation de la vitesse du son (équ. 3.36), la relation suivante est obtenue

$$\frac{c}{c_t} = \frac{\lambda_{in} + \lambda_{out}}{2c_s \left(\frac{p_e}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \quad (\text{B.41})$$

En substituant les équations (B.40) et (B.41) dans l'équation (B.38) et après réarrangement, on obtient

$$\left[\left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{4}{\gamma-1}} - \phi^2 \right] \left[\frac{c}{c_t} - \frac{\lambda_{in}}{c_s (p_e/p_{ref})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \right]^2 - \frac{\gamma-1}{2} \phi^2 \left[\left(\frac{c}{c_t} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (\text{B.42})$$

Cette équation non-linéaire permet de calculer le ratio c/c_t à l'aide d'un algorithme itératif tel que la méthode de Newton. La solution à cette équation est bornée par les deux cas limites qui sont (a) lorsque la vitesse au col est nulle et (b) lorsque la vitesse au col est sonique. Il est facile de démontrer à l'aide des équations de conservation, (équ. B.35) et (équ. (B.36)), que le ratio c/c_t pour une vitesse nulle correspond à

$$\frac{c}{c_t} = 1 \quad (\text{B.43})$$

D'autre part, lorsque la vitesse au col est sonique, soit lorsque $u_t = c_t$, l'équation de conservation de l'énergie (équ. B.35) devient

$$c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 = \frac{\gamma + 1}{2} c_t^2 \quad (\text{B.44})$$

et l'équation de continuité (équ. B.36) devient

$$\frac{u}{c_t} = \phi \left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{-2}{\gamma-1}} \quad (\text{B.45})$$

Lorsque ces deux équations sont combinées, la relation suivante est obtenue.

$$\left(\frac{c}{c_t} \right)^{\frac{4}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{c}{c_t} \right)^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right\} + \phi^2 = 0 \quad (\text{B.46})$$

Cette équation relie le ratio c/c_t à la géométrie de l'orifice, ϕ . Pour un ϕ donné, il existe donc un ratio c/c_t pour lequel l'écoulement est critique au col, que l'on note $(c/c_t)_{cr}$. À noter que lorsque $\phi = 0$,

$$\left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr} = 1$$

tandis que pour $\phi = 1$,

$$\left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Par conséquent, la solution pour un écoulement subsonique (équ. B.42) est limitée par

$$1 \leq \frac{c}{c_t} < \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr} \quad (\text{B.47})$$

où $(c/c_t)_{cr}$ est calculé à l'aide de l'équation (B.46).

Une fois que le ratio c/c_t est calculé, l'équation (B.41) permet de calculer la caractéristique de sortie, λ_{out} . Si le ratio c/c_t obtenu avec l'équation (B.42) est plus grand ou égale à $(c/c_t)_{cr}$,

alors l'écoulement est critique au col de l'orifice.

Écoulement critique

Lorsque la vitesse du gaz atteint la vitesse du son au col de l'orifice, la pression statique au col n'est plus nécessairement égale à la pression extérieure. De plus, il a été démontré précédemment que dans ce cas particulier,

$$\frac{c}{c_t} = \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr} \quad (\text{B.48})$$

En substituant cette expression dans l'équation de continuité développée pour un écoulement sonique (éq. B.45), on obtient

$$\frac{u}{c_t} = \phi \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{\frac{-2}{\gamma-1}} \quad (\text{B.49})$$

Le ratio u/c s'exprime alors comme suit,

$$\frac{u}{c} = \frac{u}{c_t} \frac{c_t}{c} = \phi \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{\frac{-2}{\gamma-1}} \left(\frac{c}{c_t} \right)_{cr}^{-1} \quad (\text{B.50})$$

Les équations des invariants de Riemann, (éq. 3.36) et (éq. 3.37), peuvent être arrangées sous la forme suivante

$$\frac{\lambda_{out}}{\lambda_{in}} = \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)} \quad (\text{B.51})$$

La solution pour un écoulement critique au col de l'orifice est obtenue en combinant les équations (B.51) et (B.50). Le diagramme de flux pour la résolution d'une extrémité avec un orifice pour un débit sortant est présenté à la figure B.2.

B.4.2 Débit entrant

Lorsque le fluide entre dans le tuyau par l'orifice, on suppose que l'écoulement se dilate selon un processus isentropique des conditions extérieures, p_0 et c_0 , jusqu'aux conditions au col de l'orifice, notées p_t , c_t et u_t . Il est ensuite considéré que le gaz se dilate de façon adiabatique dans le tuyau. La figure 3.14 illustre les diagrammes température-entropie lorsque (a) l'écoulement est subsonique et lorsque (b) l'écoulement est sonique.

Pour tenir compte de la variation d'entropie engendrée par le fluide extérieur qui s'écoule dans le domaine, les variables corrigées doivent être utilisées. La même équation que celle

présentée pour une extrémité ouverte s'applique, voir (équ. B.20) .

$$\lambda_{in_c} = \lambda_{in_n} + \left(\frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \right) \left(\frac{(c_s)_c - (c_s)_n}{(c_s)_c} \right) \quad (\text{B.52})$$

Les équations nécessaires à la résolution de ce problème sont

la conservation de la masse

$$\rho_t u_t A_t = \rho u A \quad (\text{B.53})$$

la conservation de l'énergie

$$c_0^2 = c_t^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_t^2 = c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \quad (\text{B.54})$$

la relation isentropique entre l'extérieur et le col de l'orifice

$$\frac{c_0}{c_t} = \left(\frac{p_0}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (\text{B.55})$$

Dans un premier temps, une expression reliant la pression (p) à la vitesse du fluide (u) dans la conduite est dérivée pour chacun des types d'écoulement à travers l'orifice. Une fois ces expressions obtenues, la procédure générale de résolution pour un écoulement entrant par un orifice est décrite.

Écoulement subsonique Lorsque l'écoulement est subsonique, la pression au col est égale à la pression dans le tuyau

$$p_t = p \quad (\text{B.56})$$

Par conséquent, la relation isentropique (équ. B.55) devient

$$\frac{c_0}{c_t} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.57})$$

L'équation de conservation de la masse (équ. B.53) peut être réarrangée sous la forme

$$u_t = \frac{\rho}{\rho_t} \frac{1}{\phi} u$$

où pour un gaz caloriquement parfait,

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \frac{p}{p_t} \left(\frac{c_t}{c} \right)^2$$

Comme $p = p_t$, l'équation de conservation de la masse devient

$$u_t = \left(\frac{c_t}{c} \right)^2 \frac{1}{\phi} u \quad (\text{B.58})$$

Cette expression (éq. B.58) peut être insérée dans l'équation de la conservation de l'énergie entre l'extérieur et le col de l'orifice

$$c_0^2 = c_t^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_t^2$$

ce qui donne après réarrangement

$$\left(\frac{c_0}{c_t} \right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2 \left(\frac{c_t}{c_0} \right)^2 \left(\frac{c_0}{c} \right)^4$$

En substituant c_0/c_t par l'équation (B.57), on obtient

$$\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{c_0}{c} \right)^4$$

Après réarrangement,

$$1 = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2 \left(\frac{c_0}{c} \right)^4 \quad (\text{B.59})$$

Une deuxième équation de la conservation de l'énergie s'écrit sous la forme

$$c_0^2 = c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2$$

ou encore, en divisant par c_0^2 ,

$$\left(\frac{c}{c_0} \right)^2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2 \quad (\text{B.60})$$

En combinant les deux équations de conservation de l'énergie, (éq. B.59) et (éq. B.60), l'expression suivante est obtenue

$$1 = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{u}{c_0}\right)^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0}\right)^2\right)^{-2} \quad (\text{B.61})$$

ou encore,

$$\frac{C}{\phi^2} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} + \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 = 0 \quad (\text{B.62})$$

où

$$C = \frac{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0}\right)^2\right)^2}$$

L'unique solution physique a cette équation est

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{2C} \left[\phi \sqrt{\phi^2 + 4C} - \phi^2 \right] \quad (\text{B.63})$$

Cette expression permet de relier les variables p et u pour un orifice donné, ϕ , lorsque l'écoulement est subsonique.

Écoulement critique au col L'écoulement au col est sonique lorsque $u_t = c_t$. Pour ce cas particulier, l'équation de conservation de l'énergie entre l'extérieur du tuyau et le col de l'orifice devient

$$c_0^2 = \frac{\gamma+1}{2} c_t^2$$

ou encore

$$\frac{c_0}{c_t} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

En utilisant la relation isentropique (éq. B.55), on obtient

$$\left(\frac{p_0}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (\text{B.64})$$

La limite pour un écoulement sonique correspond au cas où l'écoulement atteint tout juste Mach 1 au col de l'orifice. Pour ce cas limite, la pression au col égale encore la pression dans

le tuyau, $p_t = p$. En substituant cette relation dans l'équation (B.64), cela donne

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Par conséquent, l'écoulement est sonique au col si

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \leq \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (\text{B.65})$$

Dans le cas général où l'écoulement est sonique au col, la pression au col n'est plus nécessairement égale à la pression dans le tuyau. L'équation de continuité (éq. B.53) s'écrit

$$u = \phi \left(\frac{c}{c_t}\right)^2 \left(\frac{p_t}{p}\right) c_t$$

Après réarrangement, elle devient

$$\frac{p}{p_0} = \phi \left(\frac{p_t}{p_0}\right) \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 \left(\frac{c_0}{c_t}\right) \left(\frac{c_0}{u}\right) \quad (\text{B.66})$$

L'équation de conservation de l'énergie entre l'extérieur et l'intérieur du tuyau correspond à

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0}\right)^2 \quad (\text{B.67})$$

tandis que l'équation de l'énergie entre l'extérieur et le col de l'orifice correspond à

$$\frac{c_0}{c_t} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (\text{B.68})$$

À l'aide de la relation isentropique, l'équation (B.68) peut aussi s'écrire comme

$$\frac{p_t}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{B.69})$$

En substituant les expressions (B.67), (B.68) et (B.69) dans l'équation de conservation de la

masse (éq B.66), celle-ci devient

$$\frac{p}{p_0} = \phi \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{c_0} \right)^2}{\left(\frac{u}{c_0} \right)} \right) \quad (\text{B.70})$$

Cette relation relie la pression p et la vitesse u lorsque l'écoulement est sonique au col de l'orifice.

Écoulement critique dans le tuyau Il est aussi possible que le nombre de Mach atteigne l'unité à l'intérieur du tuyau. Dans ce cas, l'écoulement est contrôlé par l'aire du tuyau et est indépendant de l'aire de l'orifice. Pour cette condition,

$$u = c$$

Par conséquent, l'équation de conservation de l'énergie (éq. B.54) devient

$$c_0^2 = \frac{\gamma + 1}{2} u^2$$

La relation pour un écoulement critique dans le tuyau est définie par

$$u = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c_0 \quad (\text{B.71})$$

Par conséquent, l'écoulement est sonique dans le tuyau lorsque

$$u \geq \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c_0 \quad (\text{B.72})$$

Procédure de résolution, débit entrant Il est à noter que toutes les expressions, pour les différents cas possibles lorsqu'un écoulement entre dans le tuyau par un orifice, ont été développées en considérant une vitesse positive. Par conséquent, il est pratique de modifier la convention pour ce cas particulier et de définir la vitesse telle que

$$u = \frac{\lambda_{out_c} - \lambda_{in_c}}{\gamma - 1} \quad (\text{B.73})$$

En remplaçant u et c dans l'équation de la conservation de l'énergie (éq. B.54)

$$c_0^2 = c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2$$

par les invariants de Riemann, on obtient après réarrangement

$$\lambda_{out_c} = \left(\frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \right) \lambda_{in_c} + \frac{2}{\gamma + 1} \sqrt{(\gamma^2 - 1) c_0^2 + 2(1 - \gamma) \lambda_{in_c}^2} \quad (\text{B.74})$$

À partir de ce résultat, la valeur de la vitesse est calculé (éq. B.73). En fonction du type d'écoulement dans l'orifice, la pression p est calculée à partir des expressions dérivées précédemment.

Le niveau d'entropie corrigé, tel qu'illustré à la figure 3.14, peut alors être calculé à l'aide de l'équation

$$(c_s)_c = c \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.75})$$

avec

$$c = \frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \quad (\text{B.76})$$

En substituant cette relation dans l'équation (B.75), on obtient une expression pour calculer le niveau d'entropie corrigé dans le tuyau

$$(c_s)_c = \left(\frac{\lambda_{in_c} + \lambda_{out_c}}{2} \right) \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.77})$$

Finalement, afin de résoudre le cas d'un écoulement entrant par un orifice, une procédure itérative est nécessaire afin de calculer les valeurs corrigées, λ_{in_c} , λ_{out_c} et $(c_s)_c$ qui satisfont l'équation de la correction de l'entropie (éq. B.52) et la solution physique qui a été détaillée dans cette section.

Le diagramme de flux pour la résolution d'une extrémité partiellement ouverte pour débit entrant est présentés à la figure B.3.

B.4.3 Cas limite

Pour résoudre une extrémité avec un orifice, il faut tout d'abord déterminer le sens de l'écoulement. L'écoulement sera vers l'extérieur du tuyau lorsque la vitesse est positive, soit lorsque

$$\lambda_{in} > \lambda_{out}$$

À l'aide de l'équation (B.41), on trouve que la vitesse est positive lorsque

$$\lambda_{in} > \frac{c}{c_t} c_s \left(\frac{p_t}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

où

$$c_0 = c_s \left(\frac{p_t}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

ce qui donne

$$\lambda_{in} > \frac{c}{c_t} c_0 \quad (\text{B.78})$$

De plus, il a été démontré que $c/c_t = 1$ lorsque $u = 0$. Par conséquent, l'écoulement sort du tuyau lorsque

$$\lambda_{in_n} > c_0 \quad (\text{B.79})$$

B.5 Turbine

L'objectif est de déterminer une relation entre les invariants de Riemann, λ_{in} et λ_{out} , et les caractéristiques de la turbine exposées à la section 3.2.2. Dans cette analyse, la pression en aval de la turbine, p_2 , est considérée constante et égale à la pression extérieure, p_e . De plus, aucune correction pour l'entropie est appliquée à la station 1 puisque l'augmentation de l'entropie qui est calculée à travers la turbine n'est pas retransmise à la station 1. Par conséquent, le niveau d'entropie à la station 1, noté $(c_s)_1$, est égale au niveau d'entropie dans la conduite au temps précédent, c_s .

À l'entrée de la turbine, les vitesses sont définies comme

$$c_1 = \frac{\lambda_{in} + \lambda_{out}}{2} \quad (\text{B.80})$$

$$u_1 = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{\gamma - 1} \quad (\text{B.81})$$

À l'aide de la relation isentropique, la vitesse du son peut aussi être exprimée comme

$$c_1 = (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.82})$$

En combinant ces deux expressions, (  q. B.80) et (  q. B.82), on obtient

$$\lambda_{in} + \lambda_{out} = 2(c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.83})$$

Par la suite, le rapport de pression p_1/p_{ref} dans cette équation (  q. B.83) peut être remplacé par la relation suivante

$$\frac{p_1}{p_{ref}} = \frac{p_1}{p_2} \frac{p_2}{p_{ref}}$$

ce qui donne

$$\lambda_{in} + \lambda_{out} = 2(c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.84})$$

Cette relation permet de relier les paramètre λ_{in} et λ_{out} au rapport de pression à travers la turbine.

Une deuxième équation doit être définie afin de relier les invariants de Riemann au nombre de Mach. Pour commencer, le nombre de Mach en amont de la turbine correspond à

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} \quad (\text{B.85})$$

   l'aide de l'équation (B.82), on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} u_1 &= M_1 c_1 \\ &= M_1 (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

En substituant l'équation (B.86) dans l'équation (B.81), on obtient

$$\lambda_{in} - \lambda_{out} = (\gamma - 1) M_1 (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.87})$$

En combinant les équations (B.84) et (B.87), les deux invariants de Riemann peuvent être définis tels que

$$\lambda_{in} = (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1 \right) \quad (\text{B.88})$$

$$\lambda_{out} = (c_s)_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(\frac{p_2}{p_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_1 \right) \quad (\text{B.89})$$

Afin de résoudre ces équations, il faut maintenant définir une expression pour le ratio p_1/p_2 et pour le nombre de Mach M_1 à l'aide de la carte de turbine. Le nombre de Mach à l'entrée de la turbine peut être écrit comme une fonction du paramètre de débit massique tel que

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} = A_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{B.90})$$

où A_1 est l'aire de section du tuyau à l'entrée de la turbine. En définissant,

$$C = \left\{ \sqrt{\frac{R}{\gamma}} \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}A_1} \right) \right\}^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \quad (\text{B.91})$$

Il est possible de réarranger l'équation (B.90) sous la forme

$$M_1 = \left(C + \frac{\gamma-1}{2} C M_1^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{B.92})$$

Cette équation (équ. B.92) peut alors être résolue à l'aide d'une méthode itérative.

Le rapport de pression p_1/p_2 peut être quant à lui écrit sous la forme

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_2} \quad (\text{B.93})$$

où

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Par conséquent, pour chaque couple p_{01}/p_2 et $\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$ de la carte de turbine, il est possible de calculer le nombre de Mach en amont de la turbine, M_1 , à l'aide de l'équation (B.92). À partir de cette valeur le rapport des pressions statiques est calculé à l'aide de l'équation (B.93). Finalement les invariants de Riemann sont calculés avec les équations (B.88) et (B.89).

B.5.1 Calcul des performances

La puissance de la turbine est calculée à partir de la définition du rendement de la turbine (équ. 3.64),

$$\eta_{TS} = \frac{h_{01} - h_2}{h_{01} - h_{2s}}$$

Le travail instantané par unité de temps (e_A) produit par la turbine correspond à

$$e_A = \dot{m} (h_{01} - h_2) = \dot{m} \eta_{TS} (h_{01} - h_{2s}) \quad (\text{B.94})$$

La turbine idéale ($\eta_{TS} = 1$) est obtenu lorsque

1. l'écoulement à travers la turbine est isentropique
2. lorsque toute l'énergie cinétique dans le fluide est extraite, c'est-à-dire lorsque la vitesse du fluide à la sortie de la turbine est nulle

La vitesse isentropique, notée C_{is} , correspond à

$$\frac{C_{is}^2}{2} = h_{01} - h_{2s} \quad (\text{B.95})$$

Pour un gaz caloriquement parfait, cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{C_{is}^2}{2} = \left(a_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2 \right) - (c_2)_{is}^2 \quad (\text{B.96})$$

où la vitesse du son isentropique à la station 2 correspond à

$$(c_2)_{is} = c_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (\text{B.97})$$

À partir de la vitesse isentropique, le rendement instantané de la turbine est estimé à partir de la carte de rendement (fig. 3.16.b), ce qui permet de calculer le travail instantané

$$e_A = \dot{m} \eta_{TS} \frac{C_{is}^2}{2} \quad (\text{B.98})$$

Pour obtenir la puissance (P) de la turbine, le travail instantané est intégré sur un cycle complet

$$P = f \int e_A dt \quad (\text{B.99})$$

où f correspond à la fréquence de l'écoulement.

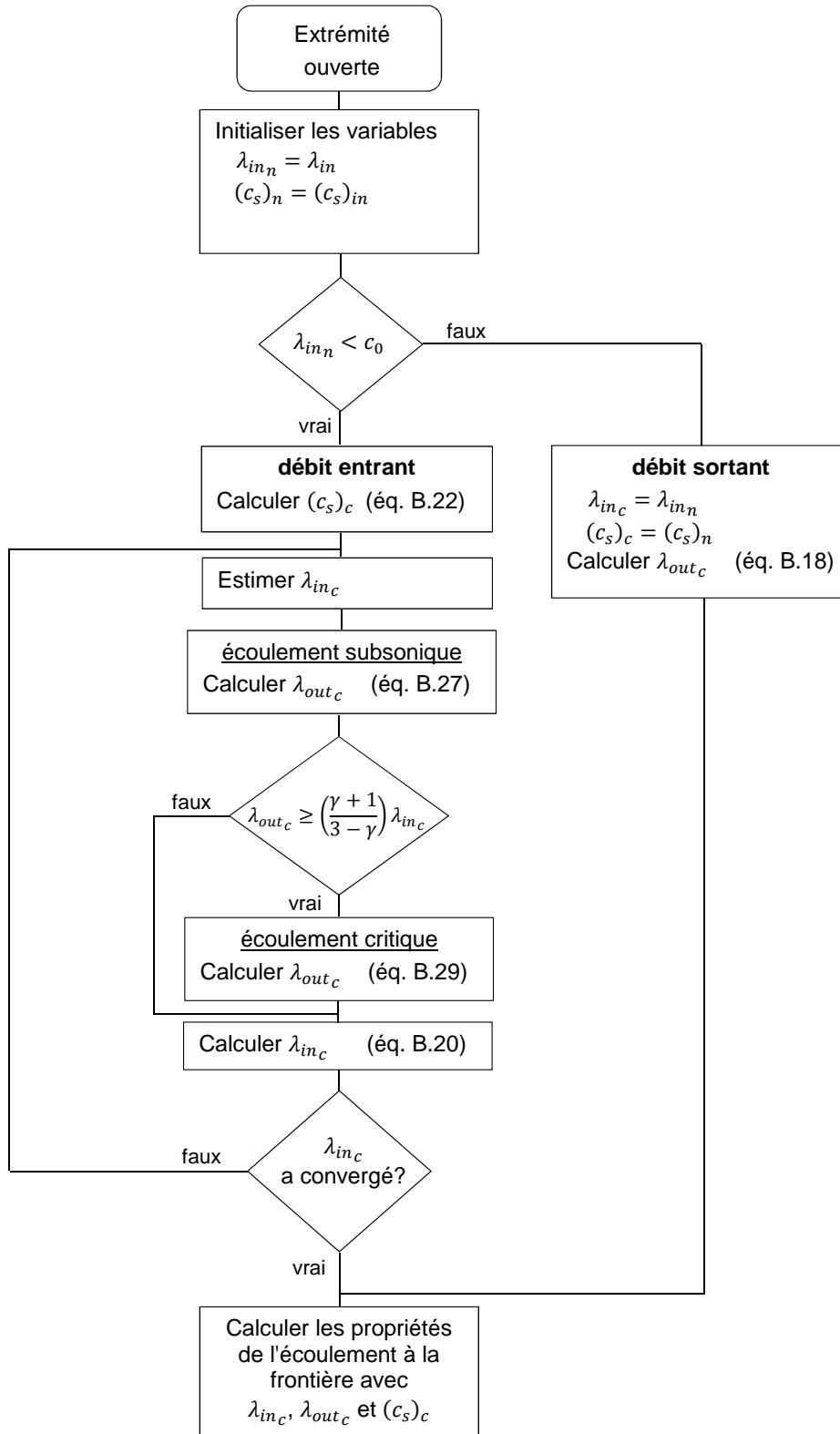


Figure B.1 Diagramme de flux - Extrémité ouverte

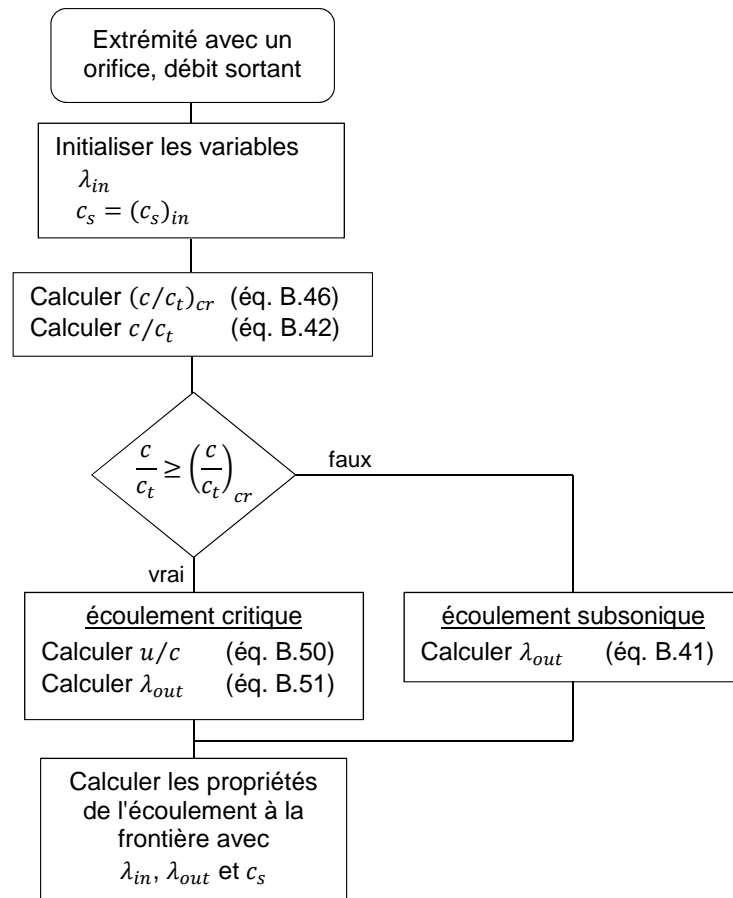


Figure B.2 Diagramme de flux - Extrémité partiellement ouverte, débit sortant

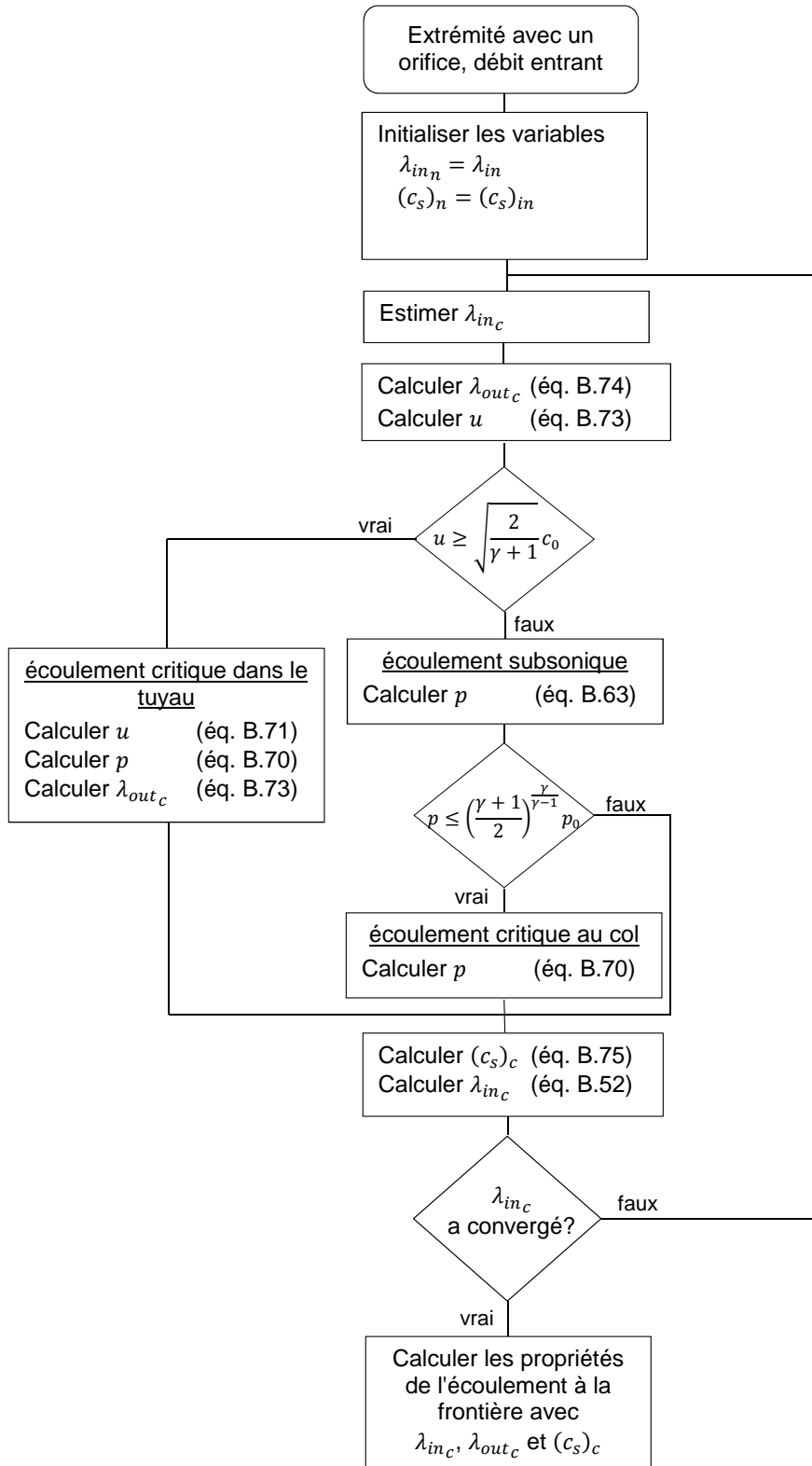


Figure B.3 Diagramme de flux - Extrémité partiellement ouverte, débit entrant